

Вариант 69

№1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота. Найдите

№2.

Найдите сумму координат вектора

№3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

№4.

Для подтверждения скидки магазин отправляет покупателю на телефон сообщение с трёхзначным кодом, равно двум из цифр которого совпадают. У Петя разрядил телефон. Какова вероятность того, что он случайно угадает код? Ответ округлите до тысячных.

№5.

Симметричную монету бросают 10 раз. В скольких случаях вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

№6.

Решите уравнение. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

№7.

Найдите если

№8.

На рисунке изображен график — производной функции определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежуток возрастания функции. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в этот промежуток.

№9.

Автомобиль разгоняется на прямой линии на участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000 \text{ км/ч}^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = at$ — пройденный автомобиль путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч .

№10.

Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора того же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

№11.

Нарисунке изображены графики функций, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

№12.

Найдите точку максимума функции

№13.

а) Решите уравнение

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

№14.

Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° .

а) Докажите, что существует точка (центр описанной сферы), одинаково удаленная от всех вершин пирамиды.

б) Найдите радиус данной сферы, если дополнительно известно, что основание трапеции равно 8 и 18, а ее боковая сторона равна 13.

№15.

Решите неравенство

№16.

Кооператив «Красный Труженик», состоящий из нескольких цехов, производящих однотипную продукцию, в 1925 году увеличил к концу года ежедневный объем выпуска продукции на p_1 процентов по сравнению с началом года. Однако в первом году 1926 года несколько цехов, достигших к концу предыдущего года ежедневного объема выпуска продукции, равнополовине ежедневного объема выпускаемой продукции всего кооператива в начале 1925 года, были закрыты на реконструкцию до начала следующего года. Остальные цеха увеличили к концу 1926 года ежедневный объем выпуска своей продукции на p_2 процентов по сравнению с началом этого года. Известно, что при каком значении p_1 общий ежедневный объем выпуска продукции кооператива к концу 1926 года будет иметь максимальное значение?

№17.

В треугольнике ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается стороны AB в точке E и BC в точке F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

№18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

имеет более двух решений.

N019

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

[illegible]

1

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27431	27
2	27732	-4
3	27191	36
4	639942	0,004
5	508780	1,2
6	639943	2
7	26805	1
8	6429	14
9	27987	1
10	99572	17
11	509149	6
12	26725	10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Обозначим $t = \sin x$, тогда

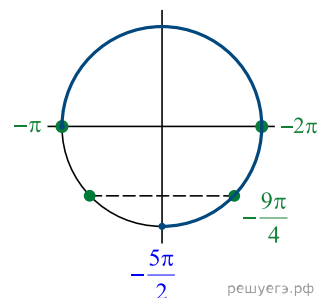
$$2t^3 + t + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(1 - t^2) \Leftrightarrow 2t^3 + 2\sqrt{2}t^2 + t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(\sqrt{2}t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases}$$

Чтобы отобрать корни, лежащие на заданном отрезке, воспользуемся тригонометрической окружностью (см. рис.). Получим корни $-\frac{9\pi}{4}$, -2π , $-\pi$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}, -2\pi, -\pi$.

Примечание.

Мы решили уравнение $2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0$, записав левую часть в виде полного квадрата $(\sqrt{2}t + 1)^2$. Можно было найти дискриминант $D = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 0$ и прийти к выводу, что уравнение имеет единственный корень

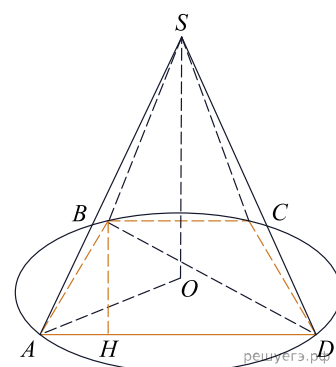
$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Если все ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в центр описанной вокруг основания окружности. Проведем через этот центр прямую, перпендикулярную основанию (она будет содержать высоту пирамиды). Построенная прямая — множество точек, равноудаленных от вершин основания. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную боковому ребру и проходящую через его середину. Все точки этой плоскости равноудалены от концов ребра. Точка пересечения этой плоскости и ранее построенной прямой будет равноудалена от всех вершин пирамиды и потому является центром описанной сферы.

б) Введем обозначения, как показано на рисунке. Пусть в основании лежит трапеция $ABCD$, точка O — центр описанной вокруг основания окружности, она также является проекцией вершины S на плоскость основания, BH — высота трапеции.



Высоту трапеции найдем из прямоугольного треугольника ABH :

$BH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2} = 12$, диагональ трапеции BH найдем из прямоугольного треугольника BHD : $BD = \sqrt{144 + 169} = \sqrt{313}$.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника BCD . Поскольку $S_{BCD} = \frac{1}{2}BH \cdot BC = 48$, для радиуса описанной окружности получаем:

$$R_{\text{оп}} = \frac{abc}{4S} = \frac{8 \cdot 13 \cdot \sqrt{313}}{4 \cdot 48} = \frac{13\sqrt{313}}{24}.$$

Далее находим высоту пирамиды:

$$SO = R_{\text{оп}} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{13\sqrt{939}}{24}.$$

По п.а) центр сферы лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды. В этом случае радиус сферы $R_{\text{сф}}$, высота пирамиды H и радиус окружности, описанной вокруг основания пирамиды $R_{\text{оп}}$, связаны соотношением

$$R_{\text{оп}}^2 = H(2R_{\text{сф}} - H).$$

Тогда

$$\left(\frac{13\sqrt{313}}{24}\right)^2 = \frac{13\sqrt{939}}{24} \cdot \left(2R_{\text{сф}} - \frac{13\sqrt{939}}{24}\right) \Leftrightarrow R_{\text{сф}} = \frac{13\sqrt{939}}{36}.$$

Ответ: б) $\frac{13\sqrt{939}}{36}$.

№ 15.

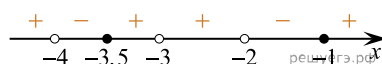
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. При условии $x \neq -3$, учитывая монотонное возрастание логарифмической функции с основанием, большим 1, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x^2 + 6x + 9)} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x+3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x+3)^2 - \log_3 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x^2 + 6x + 9)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x+3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x+3)^2 - \log_3 1} \geq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(2x+7)}{(x+3)^2 - 1} \geq 0, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(2x+7)(x+3)}{(x+4)(x+2)(x+3)} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов,



окончательно получаем: $x < -4$, $-3,5 \leq x < -3,0$, $-3 < x < -2$, $x \geq -1$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-3,5; -3) \cup (-3; -2) \cup [-1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть ежегодный объем продукции, производимый кооперативом на момент начала 1925 года, равен V , $k_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $k_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$. Имеем:

$$k_1 + k_2 = 1 + \frac{p_1}{100} + 1 + \frac{p_2}{100} = 2 + \frac{p_1 + p_2}{100} = 2 + \frac{60}{100} = 2,6.$$

Объем выпуска продукции к концу 1925 года был увеличен на p_1 процентов, поэтому он составил Vk_1 . В начале 1926 года несколько цехов, достигших суммарно к концу предыдущего года ежедневного объема выпуска продукции, равного половине ежедневного объема выпускаемой продукции всего кооператива в начале 1925 года, были закрыты на реконструкцию, следовательно, объем выпускаемой продукции стал равен $Vk_1 - 0,5V$. К концу 1926 года оставшиеся цеха увеличили объем выпуска продукции на p_2 процентов по сравнению с началом года, следовательно, объем выпуска продукции составил

$$(Vk_1 - 0,5V)k_2 = (Vk_1 - 0,5V)(2,6 - k_1).$$

Найдем производную функции $f(k_1) = (Vk_1 - 0,5V)(2,6 - k_1)$:

$$f'(k_1) = V(-2k_1 + 3,1).$$

Найдем нули производной:

$$V(-2k_1 + 3,1) = 0 \Leftrightarrow 2k_1 = 3,1 \Leftrightarrow k_1 = 1,55.$$

Функция $f(k_1)$ принимает наибольшее значение в точке максимума — $k_1 = 1,55$, откуда $p_1 = 55$.

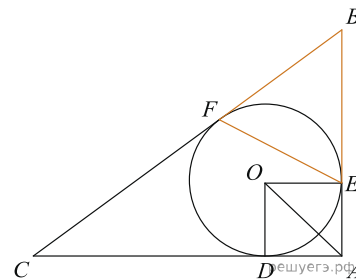
Ответ: 55.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -5$ и/или $a = 5$.	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x + 2y - 5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y &= 2x + 4y - 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 10 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 &= 10. \end{aligned}$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(2; 4)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

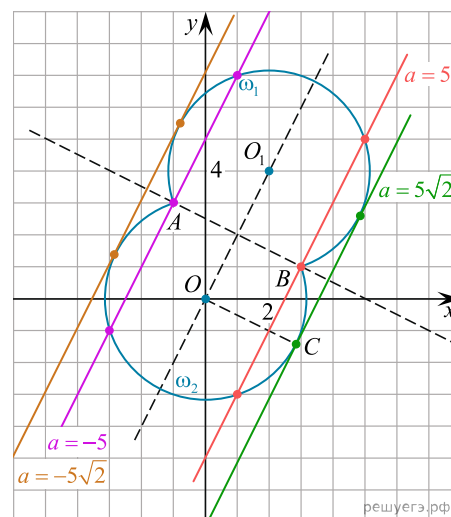
2) Если $x + 2y - 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 10 - 2x - 4y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-1; 3)$ и $B(3; 1)$, лежащих на прямой $x + 2y - 5 = 0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B , во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Заметим, что точка $C(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ лежит на дуге ω_2 и прямая OC перпендикулярна прямой O_1O , поскольку произ-



ведение угловых коэффициентов данных прямых равно -1 .

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , параллельную прямой O_1O или совпадающую с ней.

При $a = -5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A , то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a = 5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a = -5\sqrt{2}$ прямая m проходит через точку C , значит, прямая m касается дуг ω_2 и ω_1 , то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a = 5\sqrt{2}$ прямая m касается дуг ω_2 и ω_1 , то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{2} < a < -5$ или $5 < a < 5\sqrt{2}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B , то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5 < a < 5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B , то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -5\sqrt{2}$ или $a > 5\sqrt{2}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2 , то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{2} < a \leq -5$ или $5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

Ответ: $-5\sqrt{2} < a \leq -5$, $5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Разделим общую сумму в 600000 руб. на 40, получим, что каждый должен получить по 15000 руб. Так как это число кратно и 1000 и 5000, то всем 40 сотрудникам можно раздать равную премию в указанных купюрах.

б) Сумма, оставшаяся после выплаты 40000 руб., будет равна 560000 руб. При делении на 70 сотрудников получаем выплаты по 8000 руб. Так сделать не удастся, поскольку $8000 = 5000 + 3 \cdot 1000$ и для 70 сотрудников нужно будет 210 тысячных купюр, а их всего 100.

в) Если сотрудников 27 или больше, то распределим премии так: 26 человек должны получить по 4 тысячи, один — всё остальное. Тогда выдать премии будет нельзя по тем же причинам, что и в пункте «б».

Если же их не больше 26, то выберем всех, кроме одного. Будем выдавать им премии, используя не более четырёх тысячных купюр, пока не кончатся пятизначные.

Если пятизначные купюры закончились, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы, а последний просто заберёт все оставшиеся деньги.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

