

Вариант 71

[illegible]

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27800	6
2	27710	0
3	27146	22
4	320185	0,25
5	319353	0,019
6	689090	-94
7	563891	2
8	27494	1
9	27987	1
10	99607	72
11	508911	31
12	26693	-2

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при любом x . Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow 9x^2 + 5 = 4x^4 + 7 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0.$$

Значит, либо $4x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$, либо $x^2 - 2 = 0$, откуда $x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < \sqrt{2}$, отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

№ 14.

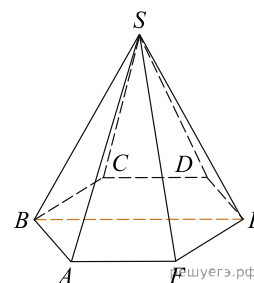
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Вместо прямой CD рассмотрим параллельную ей прямую BE . Искомый угол равен углу SBE .

б) Треугольник SBE равносторонний, поскольку большая диагональ правильного шестиугольника вдвое больше его стороны: $BE = 2CD$. Следовательно, $\widehat{SBE} = 60^\circ$.

Ответ: 60° .



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пользуясь свойствами логарифма, преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{3}}((4-x)(x^2+29)) &\leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+24) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(x^2+29) > 0, \\ x^2-10x+24 > 0, \\ 7-x > 0, \\ (4-x)(x^2+29) \geq (x^2-10x+24)(7-x) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ (x-4)(x-6) > 0, \\ x < 7, \\ (4-x)(x^2+29) \geq (x-4)(x-6)(7-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ -(x^2+29) \leq (x-6)(7-x), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ (x-4)(x-6) > 0, \\ x < 7, \\ (4-x)(x^2+29) \geq (x-4)(x-6)(7-x) \end{cases} \Leftrightarrow_{x < 4} \\
 &\Leftrightarrow_{x < 4} \begin{cases} x < 4, \\ -(x^2+29) \leq (x-6)(7-x), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: [1; 4).

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на первом комбинате x человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq x \leq 500$, тогда $500 - x$ человек заняты изготовлением деталей B . Пусть на втором комбинате y человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq y \leq 200$, тогда $200 - y$ человек заняты изготовлением деталей B . Всего на двух комбинатах будет изготовлено $8x + 2y$ деталей A и $2(500 - x) + 8(200 - y)$ деталей B . Для изготовления изделия нужна 1 деталь A и 3 детали B . Чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий, должно выполняться равенство

$$3 \cdot (8x + 2y) = 2 \cdot (500 - x) + 8 \cdot (200 - y),$$

откуда $x = 100 - \frac{7y}{13}$.

Количество изделий S будет равно количеству деталей A :

$$S(x; y) = 8x + 2y = 8 \cdot \left(100 - \frac{7y}{13}\right) + 2y = 800 - \frac{30y}{13}.$$

Наибольшее значение убывающей линейной функции $f(y) = 800 - \frac{30y}{13}$ достигается при наименьшем возможном значении y , то есть при $y=0$. При этом $x=100$, а потому на первом комбинате будет изготовлено 800 деталей A и $400 \cdot 2 = 800$ деталей B , а на втором комбинате — только 1600 деталей B .

Ответ: 800.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный угол. Отрезки BO и OC равны как радиусы. Следовательно, в равнобедренном треугольнике OBC

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha = \angle APC.$$

б) По теореме синусов в треугольнике ABC получаем:

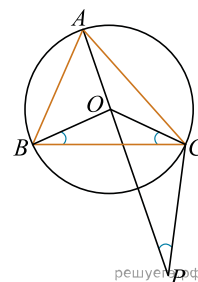
$$2OC = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{24}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{24}{\frac{4}{5}} = 30,$$

то есть $OC = 15$. По теореме синусов в треугольнике OPC находим:

$$2R = \frac{OC}{\sin \angle OPC} = \frac{15}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{15}{\cos \alpha} = \frac{15}{\frac{3}{5}} = 25,$$

откуда следует, что $R = 12,5$.

Ответ: б) 12,5.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Рассмотрим первое уравнение. На отрезке $[-2; 3]$ оно имеет вид $x^2 + (y - 1)^2 = 13$. Его график — две дуги окружности с центром в $(0; 1)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

Вне указанного отрезка уравнение имеет вид $(x - 1)^2 = (y - 1)^2$, откуда $y - 1 = \pm(x - 1)$. В этом случае графиком является приведенное на рисунке объединение четырех лучей, лежащих на прямых $y = x$ и $y = 2 - x$.

Второе уравнение задаёт семейство прямых, параллельных прямой $y = \frac{2}{3}x$, каждая из которых проходит через точку $(0; \frac{a}{3})$, зависящую от параметра a .

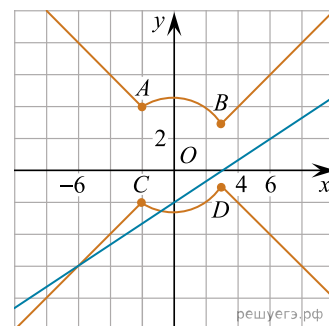
При $a=16$ эта прямая проходит через точку $A(-2; 4)$. При $a=3$ — через точку $B(3; 3)$. При $a = -2$ — через точку $C(-2; -2)$. При $a = -9$ — через точку $D(3; -1)$.

Из геометрических соображений ясно, что прямая касается окружности, когда проходит через точку A или точку $E(2; -2)$. Последнее происходит при $a = -10$.

На основе этого исследования можно записать ответ: одно или два решения система имеет при

$$a \in (-\infty; -10) \cup (-9; -2] \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -10) \cup (-9; -2] \cup [3; +\infty)$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, может: $1157 + 1571 = 2728$. Покажем, как найти этот пример. Пусть $\overline{abcd}$ — исходное число (черта сверху показывает, что это не произведение, а десятичная запись числа цифрами). Первая цифра суммы $\overline{abcd} + \overline{bcda}$ равна 2, поэтому $a = b = 1$. Последняя цифра суммы равна 8, поэтому $d = 7$. Тогда $c = 5$.

б) Нет, не может. Пусть $\overline{abcde}$ — исходное число. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{abcde} + \overline{bcdea} &= 10001a + 11000b + 1100c + 110d + 11e = \\ &= 11 \cdot (909a + 1000b + 100c + 10d + e) + 2a. \quad \overline{abcde} + \overline{bcdea} = \\ &= 10001a + 11000b + 1100c + 110d + 11e = \\ &= 11 \cdot (909a + 1000b + 100c + 10d + e) + 2a.\end{aligned}$$

Это число не делится на 11, поэтому оно не может равняться 83 347.

в) Пусть $\overline{925abc}$ — исходное число. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{925abc} + \overline{25abc9} &= 1175009 + 11(100a + 10b + c) = 11(106819 + \overline{abc}). \quad \overline{925abc} + \overline{25abc9} = 1175009 + 11(100a + 10b + c) = \\ &= 11(106819 + \overline{abc}).\end{aligned}$$

Это число делится на 99, только если число $106819 + \overline{abc}$ делится на 9, то есть если трёхзначное число $\overline{abc}$ даёт остаток 2 при делении на 9.

Цифры a и b можно выбрать произвольным образом из множества от 1 до 9, а по ним однозначно вычисляется значение c :

$$c = \begin{cases} 11 - a - b, & \text{если } 2 \leq a + b < 11, \\ 20 - a - b, & \text{если } 11 \leq a + b \leq 18. \end{cases}$$

Таким образом, существует ровно 81 число.

Ответ: а) да; б) нет; в) 81.