

Вариант 72

[illegible]

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27771	24
2	27720	6
3	27133	6
4	320185	0,25
5	680565	0,91
6	525399	2
7	26900	80
8	526007	4
9	28007	60
10	99595	12
11	639480	0,0625
12	26710	-17

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Сделаем замену переменной: $y = \sqrt{x-4}$. Получаем $y^2 = x-4$ или $x = y^2 + 4$. Тогда:

$$\sqrt{y^2 + 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 4 \Leftrightarrow |y+2| + |y-2| = 4.$$

Заметим, что $y \geq 0$ и поэтому, $y+2 > 0$, получаем:

$$y+2 + |y-2| = 4 \Leftrightarrow |y-2| = 2-y.$$

Равенство $|a| = -a$ верно только для неположительных значений a . Поэтому $y-2 \leq 0$, откуда

$$\sqrt{x-4} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8.$$

б) В силу цепочки неравенств

$$4 = 3 + 1 = \sqrt{9} + 1 < \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1 < \sqrt{49} + 1 = 8 < 10$$

из всех решений уравнения на отрезке $[2\sqrt{3} + 1; 10]$ лежат только решения $[2\sqrt{3} + 1; 8]$.

Ответ: а) $[4; 8]$; б) $[2\sqrt{3} + 1; 8]$.

Приведем другое решение.

Заметим, что обе части уравнения положительны, возведем их в квадрат:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+4\sqrt{x-4} + 2\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} \cdot \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} + x-4\sqrt{x-4} &= 16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} \cdot \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} &= 8-x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16(x-4) = (8-x)^2 \\ 4 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 64 = 64 - 16x + x^2 (*) \\ 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Равенство (*) выполняется на всей области определения, следовательно, решением является отрезок $[4; 8]$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Продлим прямую LM до пересечения с продолжением ребра AC в точке F . Из точки F проведем прямую FN до пересечения с ребром CD в точке P . Тогда четырехугольник $MNPL$ — сечение тетраэдра плоскостью. По теореме Менелая для прямой PN и треугольника ADC получаем:

$$\frac{CP}{PD} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{PD} \cdot 2 \cdot \frac{AF}{FC} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{1}{2} \frac{FC}{AF}.$$

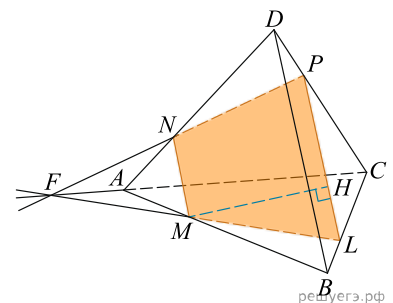
По теореме Менелая для прямой LM и треугольника ABC получаем:

$$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \cdot \frac{AF}{FC} = 1 \Leftrightarrow AF = \frac{1}{4} FC.$$

Из полученных отношений находим:

$$\frac{CP}{PD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{FC}{FC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2.$$

б) В треугольниках CPL и CDB угол C — общий, а стороны пропорциональны: $\frac{CP}{PD} = \frac{CL}{LB}$. Значит, эти треугольники подобны, отрезок PL параллелен ребру DB , $PL = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Аналогично получаем из треугольников ANM и ADB , что отрезок MN параллелен ребру DB и равен 2. Тогда отрезки ML и NP параллельны. Кроме того, эти отрезки равны как соответственные элементы равных треугольников NDP и MBL . Найдем их длины по теореме косинусов:



$$NP = ML = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

Таким образом, четырехугольник $MNPL$ — равнобокая трапеция. Опустим из ее вершины высоту MH , длину которой найдем из прямоугольного треугольника MKL по теореме Пифагора:

$$MH = \sqrt{ML^2 - LH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{PL - MN}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - 1} = \sqrt{11}.$$

Вычислим площадь трапеции:

$$S_{MNPL} = \frac{MN + PL}{2} \cdot MH = \frac{2 + 4}{2} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{11}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \pi x \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos \pi x \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq \log_3(2 + \cos \pi x) \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \log_3(2 + \cos \pi x) \leq 1, -1 \leq \cos \pi x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos \pi x \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \log_3(2 + \cos \pi x) \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \log_3(2 + \cos \pi x) \leq 1, \end{aligned}$$

причём равенство нулю достигается только при $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Значит, первый и последний множитель в левой части исходного неравенства не могут быть отрицательными. Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 12 \leq 0, (*) \\ 60 \leq x \leq 260. \end{cases}$$

Решим отдельно логарифмическое неравенство

$$\begin{aligned} \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 12 \leq 0 &\Leftrightarrow (\log_4 x - 3)(\log_4 x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \leq \log_4 x \leq 4 &\Leftrightarrow 4^3 \leq x \leq 4^4 \Leftrightarrow 64 \leq x \leq 256. \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_4 x - 3)(\log_4 x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq \log_4 x \leq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4^3 \leq x \leq 4^4 \Leftrightarrow 64 \leq x \leq 256. \end{aligned}$$

Тогда система (*) равносильна системе

$$\begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ 64 \leq x \leq 256, \\ 60 \leq x \leq 260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60, \\ x = 62, \\ 64 \leq x \leq 256, \\ x = 258, \\ x = 260. \end{cases}$$

Ответ: $\{60, 62, 258, 260\} \cup [64; 256]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение.

Пусть S — сумма, которую Аристарх откладывает ежемесячно, x — порядковый номер месяца, с которого Аристарх начал откладывать деньги. Тогда в месяц x стоимость пакета акций равна $87,5 \cdot 1,2^{x-1}$, а сумма накоплений Аристарха равна Sx . Чтобы Аристарх смог купить пакет акций, должно выполняться неравенство $87,5 \cdot 1,2^{x-1} \leq Sx$. Найдем минимальное значение S , при котором данное неравенство имеет решения. Выполним преобразования:

$$87,5 \cdot 1,2^{x-1} \leq Sx \Leftrightarrow \frac{87,5 \cdot 1,2^x}{1,2} \leq Sx \Leftrightarrow \frac{875}{12} \cdot \frac{1,2^x}{x} \leq S.$$

Найдем минимальное значение функции $f(x) = \frac{875}{12} \cdot \frac{1,2^x}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1,2^x}{x}$:

$$f'(x) = \left(\frac{1,2^x}{x} \right)' = \frac{1,2^x(x \ln 1,2 - 1)}{1,2^2}.$$

Находим нули производной:

$$1,2^x(x \ln 1,2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x \ln 1,2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \ln 1,2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 1,2} \Leftrightarrow x = (\ln 1,2)^{-1}.$$

Таким образом, наименьшее значение функции равно $\frac{875}{12} \cdot \frac{1,2^{(\ln 1,2)^{-1}}}{(\ln 1,2)^{-1}}$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Если четырехугольник $ABMH$ вписан в окружность, то сторона AB — ее диаметр (поскольку $\angle AHB = 90^\circ$), значит, $\angle AMB = 90^\circ$, откуда следует, что отрезок AM — медиана и высота, следовательно, $AB = AC$.

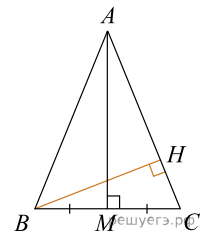
б) Отрезок MH — медиана прямоугольного треугольника BHC , поэтому $MH = \frac{BC}{2}$, то есть $BC = 6$. Пусть $AM = 4x$ и $BH = 3x$, тогда

$$\frac{4x \cdot 6}{2} = \frac{3x \cdot AC}{2},$$

откуда $AC = BA = 8$. Следовательно, $AM = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$, откуда для площади треугольника ABC получаем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{55} = 3\sqrt{55}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{55}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Вычтем из второго уравнения первое и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 3y)^2 + (2x - 3y) - 3y = 0, \\ (x - 2y)^2 - 2(4 - a)(x - 2y) + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

Пусть $2x - 3y = s$, $x - 2y = t$, тогда $-3y = 6t - 3s$. Получаем систему

$$\begin{cases} s^2 + s + 6t - 3s = 0, \\ t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s - 1)^2 = 1 - 6t, \\ t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение при $1 - 6t \geq 0$, тогда система имеет решения в том случае, когда уравнение $t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0$ имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условию $t \leq \frac{1}{6}$. Дискриминант этого квадратного уравнения равен

$$D = 4(4 - a)^2 - 4(a^2 - 2a - 5) = 12(7 - 2a).$$

Значит, уравнение имеет корни при $a \leq \frac{7}{2}$.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины $t_0 = 4 - a$. При $a \leq \frac{7}{2}$ абсцисса вершины $t_0 \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$. Значит, только один (меньший) корень уравнения $f(t) = 0$ может быть не больше $\frac{1}{6}$. Для этого достаточно, чтобы $f\left(\frac{1}{6}\right) \leq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{36} - \frac{4 - a}{3} + a^2 - 2a - 5 \leq 0 &\Leftrightarrow a^2 - \frac{5}{3}a - \frac{227}{36} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} - \sqrt{7} \leq a \leq \frac{5}{6} + \sqrt{7}. \\ \frac{1}{36} - \frac{4 - a}{3} + a^2 - 2a - 5 \leq 0 &\Leftrightarrow a^2 - \frac{5}{3}a - \frac{227}{36} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} - \sqrt{7} \leq a \leq \frac{5}{6} + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left[\frac{5}{6} - \sqrt{7}; \frac{5}{6} + \sqrt{7}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, $\text{НОД}(d, 100)$ обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m - n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ есть кратные 100, то это члены с номерами вида $kp + q$, где q — номер первого члена, кратного 100 ($q \leq k$), а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100. Если $k \leq 4$, то $12 < \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \geq 5$, то $10 > \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x . По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ чисел. Аналогично, среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$ кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k}\right] = \left[\frac{2n}{k}\right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \leq 66$. Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{132}$ ровно два делятся на 100 ($a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$). Среди чисел $a_{133}, a_{134}, \dots, a_{330}$ ровно одно делится на 100 ($a_{232} = 300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) да, например прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.