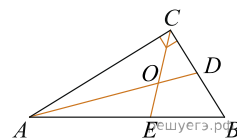


Вариант 73

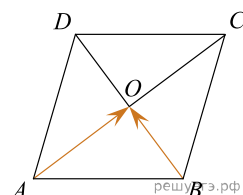
№ 1.

Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.



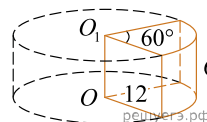
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} - \vec{BO}$.



№ 3.

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



№ 4.

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

№ 5.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 3. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 4. Какова вероятность того, что был сделан ровно один бросок? Ответ округлите до сотых.

№ 6.

Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.

№ 7.

Найдите $3 \cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

№ 8.

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

№ 9.

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p — давление газа в паскалях, V — объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

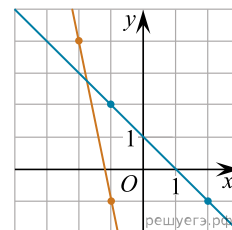
№ 10.

Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в раз-

мере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = (x + 16)e^{16-x}$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

№ 15.

Решите неравенство $3^{1+\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

№ 16.

15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

№ 17.

В треугольнике FGH угол G прямой. Точка D лежит на стороне FH , A и B — точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно, L — середина DF , K — середина DH .

а) Докажите, что $KL : FH = 1 : 2$.

б) Найдите площадь треугольника GAB , если $FG = 8$, $GH = 2$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y = \left| y - 2 + \frac{3}{x} \right|, \\ 2y(y - 4) + 3x(ax + 4) = xy(2a + 3) \end{cases}$$

имеет больше трех решений.

№ 19.

На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

Ответы

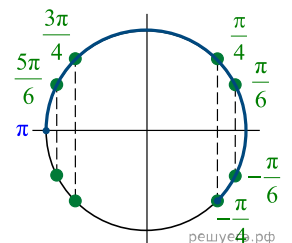
Номер	Задание	Ответ
1	27765	61
2	27718	10
3	27198	144
4	320181	0,4
5	508792	0,63
6	282850	-1
7	26777	1
8	119973	-33
9	27990	0,125
10	99587	35000
11	509241	2,75
12	26713	-15

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Решим уравнение:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 2x &= \cos 2x + 4 \sin^4 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = \cos 2x + (2 \sin^2 x)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = \cos 2x + (1 - \cos 2x)^2 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sin^2 2x = \cos 2x + 4 \sin^4 x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = \cos 2x + (2 \sin^2 x)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = \cos 2x + (1 - \cos 2x)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



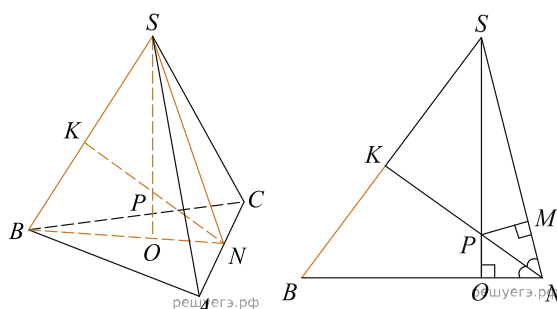
б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис). Подходят: $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Точка O принадлежит отрезку BN , значит, точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Значит, прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K . Треугольник SNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$. Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$. Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK , то искомое расстояние равно длине отрезка BK . NK является медианой треугольника SNB , поэтому $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

Приведем решение а) Ивана Иванова из Владивостока.

Данная треугольная пирамида правильная, поэтому точки B, S, N, O и P лежат в одной плоскости. Значит, пря-

мая PN пересекает ребро BS в некоторой точке K . Рассмотрим треугольник BSO и прямую KN , пересекающую сторону SO этого треугольника в точке P . По теореме Менелая: $\frac{BN}{NO} \cdot \frac{OP}{SP} \cdot \frac{SK}{BK} = 1$. Поскольку $BN:NO=3$ (по теореме о точке пересечения медиан), а $\frac{OP}{SP} = \frac{1}{3}$ (по условию), заключаем, что $\frac{SK}{BK} = 1$, то есть $SK=BK$. Значит, отрезок NK — медиана треугольника BNS . Этот треугольник является равнобедренным, поскольку $BN=SN$ как соответственные медианы равных треугольников. Следовательно, отрезок NK является также и высотой треугольника BNS . Точки N , P и K лежат на одной прямой, а потому прямая NP перпендикулярна прямой BS .

Приведем еще одно решение пункта а).

Пусть a — длина ребра пирамиды. Тогда

$$BN = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$NO = \frac{1}{3}BN = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$BO = \frac{2}{3}BN = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$PO = \frac{1}{4}SO = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Точка O принадлежит отрезку BN , значит, точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Поэтому прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K . Из треугольника NOP получим $\operatorname{tg} ONP = \frac{OP}{ON} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из треугольника SOB получим $\operatorname{ctg} OBS = \frac{OB}{OS} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда в треугольнике KNB

$$\operatorname{tg} KNB = \operatorname{tg} ONP = \operatorname{ctg} OBS = \operatorname{ctg} KBN,$$

следовательно, $\angle KNB + \angle KBN = 90^\circ$. Тогда угол NKB равен 90° , то есть прямые NP и BS перпендикулярны.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство, воспользовавшись свойствами степеней и логарифмов, в том числе свойством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$:

$$\begin{aligned}
 3^{1+\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} &\leq 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0.5}(2x+3)} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 9^{\log_2 |x|} \leq 5 \cdot 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3^{1+\log_2 x^2} + 2 \cdot |x|^{\log_2 9} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0.5}(2x+3)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 9^{\log_2 |x|} \leq 5 \cdot 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 5 \cdot 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x^2} \leq 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow \log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3) \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\log_2 x^2} + 2 \cdot 3^{\log_2 x^2} \leq 5 \cdot 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3^{\log_2 x^2} \leq 3^{\log_2(2x+3)} \Leftrightarrow \log_2 x^2 \leq \log_2(2x+3) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2x+3, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2x+3, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 3]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть планируется взять в кредит $18S$ у. е. Заполним таблицу:

Месяц (номер месяца)	Долг на 1-е число месяца, у. е.	Выплата, у. е.	Долг на 15-е число месяца, у. е.
Январь			$18S$
Февраль (1)	$18S \cdot 1,02$	$S + 18S \cdot 0,02$	$17S$
Март (2)	$17S \cdot 1,02$	$S + 17S \cdot 0,02$	$16S$
Апрель (3)	$16S \cdot 1,02$	$S + 16S \cdot 0,02$	$15S$
...	...	...	...
Июнь (17)	...	...	S
Июль (18)	$S \cdot 1,02$	$S + S \cdot 0,02$	0

Найдём сумму всех выплат:

$$\begin{aligned}
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S.
 \end{aligned}$$

Тогда общая сумма, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, в процентах от суммы кредита составляет

$$\frac{18 \cdot 1,19S \cdot 100\%}{18S} = 119\%.$$

Ответ: 119.

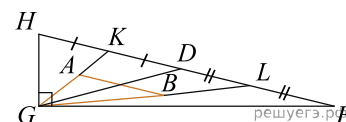
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$KL = KD + DL = \frac{1}{2}DH + \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}(DH + DF) = \frac{1}{2}HF,$$

откуда и следует, что $KL : FH = 1 : 2$.



б) Отрезки GK и GL являются медианами треугольников GHD и GDF соответственно, откуда $\frac{GA}{GK} = \frac{GB}{GL} = \frac{2}{3}$. Далее,

$$\frac{S_{GAB}}{S_{GKL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot GA \cdot GB \cdot \sin \angle AGB}{\frac{1}{2} \cdot GK \cdot GL \cdot \sin \angle KGL} = \frac{4}{9}.$$

Площади треугольников GKL и GHF относятся как $\frac{1}{2}$, потому что $KL = \frac{1}{2}HF$, следовательно,

$$S_{GAB} = \frac{2}{9}S_{GHF} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = \frac{16}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{16}{9}$.

№ 18.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Поскольку

$$|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x = \pm y, \end{cases}$$

получаем:

$$\begin{aligned} \left| y - 2 + \frac{3}{x} \right| = \frac{5}{x} + 3 - y &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y \geq 0, \\ \begin{cases} y - 2 + \frac{3}{x} = \frac{5}{x} + 3 - y, \\ y - 2 + \frac{3}{x} = -\frac{5}{x} - 3 + y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y \geq 0, \\ \begin{cases} y = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}, \\ x \leq -8 \text{ или } x > 0, \\ x = -8, \\ y \leq 2\frac{3}{8}. \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y \geq 0, \\ \begin{cases} y = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}, \\ x \leq -8 \text{ или } x > 0, \\ x = -8, \\ y \leq 2\frac{3}{8}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y \geq 0, \\ \begin{cases} y = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}, \\ x \leq -8 \text{ или } x > 0, \\ x = -8, \\ y \leq 2\frac{3}{8}. \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + 3 - y \geq 0, \\ \begin{cases} y = \frac{1}{x} + \frac{5}{2}, \\ x \leq -8 \text{ или } x > 0, \\ x = -8, \\ y \leq 2\frac{3}{8}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$\begin{aligned} 2y(y-4) + 3x(ax+4) &= xy(2a+3) \Leftrightarrow 2y^2 - 8y - xy(2a+3) + 3x(ax+4) = 0 \Leftrightarrow 2y(y-4) + 3x(ax+4) = xy(2a+3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2y^2 - 8y - xy(2a+3) + 3x(ax+4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y^2 - (8 + 2ax + 3x)y + 3x(ax+4) &= 0 \Leftrightarrow y^2 - \left(4 + ax + \frac{3}{2}x\right)y + \frac{3}{2}x(ax+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ y = ax + 4. \end{cases} \Leftrightarrow 2y^2 - (8 + 2ax + 3x)y + 3x(ax+4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - \left(4 + ax + \frac{3}{2}x\right)y + \frac{3}{2}x(ax+4) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ y = ax + 4. \end{cases} \Leftrightarrow 2y^2 - (8 + 2ax + 3x)y + 3x(ax+4) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - \left(4 + ax + \frac{3}{2}x\right)y + \frac{3}{2}x(ax+4) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ y = ax + 4. \end{cases} &\end{aligned}$$

Система имеет больше трех решений тогда и только тогда, когда графики ее первого и второго уравнений имеют больше трех общих точек. Построив графики (см.рис.) заключаем, что прямая $y = \frac{3}{2}x$ пересекает график первого уравнения системы в точке $B(-8; -12)$. Тогда прямая, задаваемая уравнением $y = ax + 4$, должна иметь с графиком первого уравнения системы не менее двух общих точек. Каждая из этих прямых проходит через точку с координатами $(0; 4)$. При $a = -\frac{9}{16}$ происходит касание прямой и гиперболы.

Действительно, гипербола имеет со своей касательной лишь одну общую точку, а значит, уравнение $\frac{1}{x} + \frac{5}{2} = ax + 4$, то есть уравнение $2ax^2 + 3x - 2 = 0$, должно иметь единственное решение. Дискриминант полученного уравнения равен $9 + 16a$, он обращается в нуль при $a = -\frac{9}{16}$.

При всех отрицательных значениях параметра, больших $-\frac{9}{16}$, помимо точки B графики имеют еще две общие точки, что подходит. При $a = 0$ получаем горизонтальную прямую $y = 4$, она не пересекает график первого уравнения. Положительные значения параметра подходят все, кроме значения $a = 2$. При $a = 2$ прямая $y = ax + 4$ проходит через точку B , а потому графики имеют лишь две общие точки.

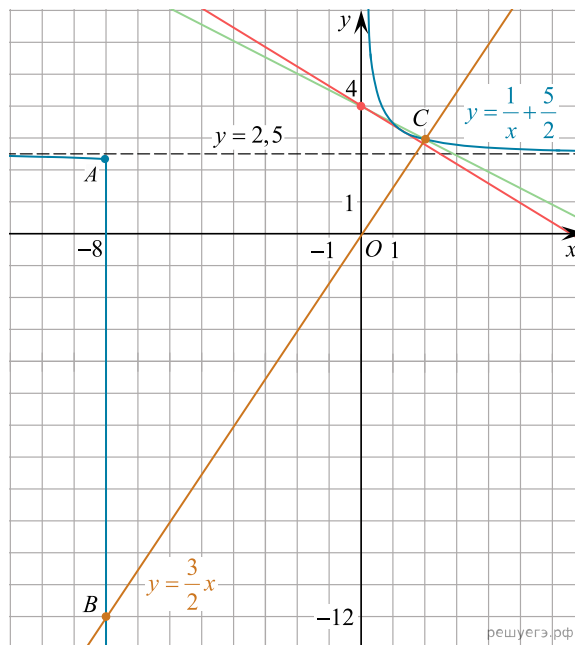


График первого уравнения имеет с графиком второго больше трех общих точек при всех $a \geq -\frac{9}{16}$, отличных от $-\frac{1}{2}$, 0 и 2.

Ответ: $\left(-\frac{9}{16}; -0,5\right) \cup (-0,5; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Сразу заметим, что количества хамелеонов разных цветов дают различные остатки от деления на 3, и эта ситуация сохраняется— можно считать, что при встрече количество всех видов хамелеонов уменьшается на 1 (и все остатки по-прежнему разные), а затем количество хамелеонов одного из цветов увеличивается на 3, что не влияет на остатки. Более того, сохраняются разности между остатками. То есть если изначально разность между числом малиновых и числом бурых давала при делении на 3 остаток 1, то это свойство сохранится и в дальнейшем (при «правильном» понимании остатков для отрицательных чисел— например, -10 при делении на 3 дает остаток 2, поскольку $-10 = -4 \cdot 3 + 2$).

а) Если встретятся малиновый и бурый хамелеоны, потом снова малиновый и бурый, а потом малиновый и серый, то за эти три встречи число бурых хамелеонов не изменится, число серых вырастет на 3, а число малиновых уменьшится на 3. Повторяя такую последовательность встреч 4 раза, получим требуемое.

б) Количества хамелеонов должны стать равными 60, 0, 0, то есть все должны давать одинаковые остатки от деления на 3, что невозможно.

в) В силу замечания в начале решения, разность между количествами малиновых и бурых хамелеонов при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому если малиновых хамелеонов 2, то бурых не может быть 0. Значит, серых не более $60 - 2 - 1 = 57$. Такого количества легко добиться, обеспечив 27 встреч между бурым и малиновым хамелеонами.

Ответ: а) да; б) нет; в) 57.
