

Вариант 74

№ 1.

В треугольнике ABC угол A равен 135° . Продолжения высот BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите длину вектора $2\vec{a} - \vec{b}$.

№ 3.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SD = 10$, $SO = 6$. Найдите длину отрезка AC .

№ 4.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

№ 5.

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

№ 6.

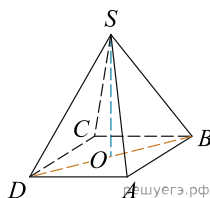
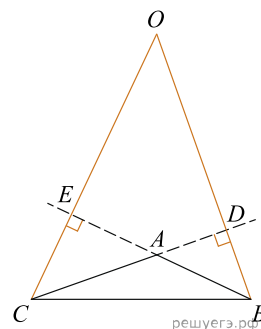
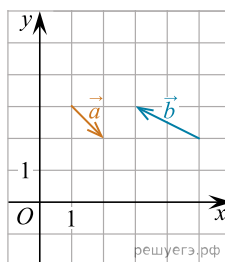
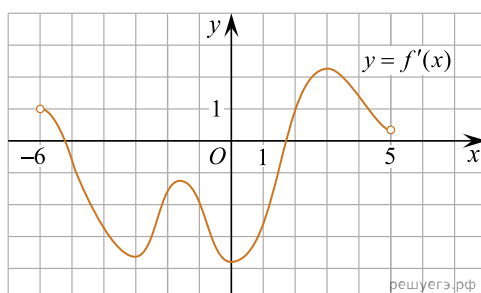
Решите уравнение $x^2 + 9 = (x + 9)^2$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 8^x$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-6; 5]$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па)— давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

№ 10.

Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня— на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.

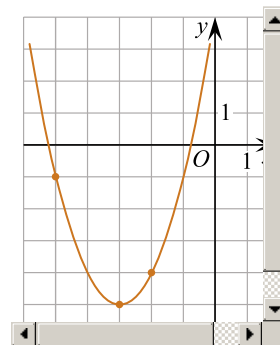
№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 5]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $5^{2\log_2(\sin x)} = \frac{5}{5^{\log_2(\sin x)}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны. Точки M и N — середины ребер SA и SC соответственно.

а) В каком отношении плоскость BMN делит высоту SH пирамиды?

б) Найдите угол между плоскостью BMN и основанием пирамиды, если ребра пирамиды равны 12.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(9x - 4) \geq 0$.

№ 16.

Трейдер потратил треть своих денег на приобретение акций одного акционерного общества (АО), а остальные деньги— на акции второго АО. Спустя три месяца цены акций обоих АО выросли на определенные для каждого АО проценты, а еще через три месяца цены акций выросли на столько же процентов, что и в предыдущий период. В результате за полгода общая стоимость акций трейдера выросла на 98%. Если бы после первых трех месяцев трейдер продал все акции первого АО по новой цене и на все полученные деньги приобрел бы акции второго АО, то общий прирост инвестиций за полгода составил бы 110%. Какой процент прибыли получит трейдер за полгода, вложив всю сумму в акции первого АО?

№ 17.

В треугольнике ABC известны стороны $AB=4$, $AC=5$ и $BC = \sqrt{61}$. На его стороне BC вне треугольника (точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC) построим равносторонний треугольник BCD .

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x-2+\sqrt{4a-a^2-3})\left(\sqrt{a^2+(x-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(x-2)^2}-\sqrt{2}\right)(x-2)=0$$

имеет не менее двух решений на отрезке $[1,5; 2,5]$.

..

№ 19.

Для каждого натурального числа введем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (например, $1! = 1$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$).

- а) Найдите наибольшее возможное n , если $\left(\frac{n!}{8}\right)$ не является натуральным числом.
- б) Найдите наибольшее возможное n , если $(n+2)! - 42(n!) < 0$.
- в) Найдите наибольшее возможное n , если $((n!)^2 - 12n!)$ не делится на 13.

,

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	510796	45
2	649905	5
3	914	16
4	500250	0,92
5	320174	0,9975
6	77370	-4
7	77401	64
8	551737	8
9	27992	2
10	99621	24
11	508935	31
12	77441	0

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) На области определения квадратного корня справедливо равенство $\sqrt{a^2} = a$. Поэтому при условии

$$-x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (*)$$

правая часть уравнения равна 3. Получаем:

$$\begin{aligned}
 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 4 = 3 &\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{2-1}{3}, \\ 3^x = \frac{2+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1, \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1. \end{cases} \\
 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 4 = 3 &\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{2-1}{3}, \\ 3^x = \frac{2+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1, \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Оба корня удовлетворяют условию (*). Итак, $x = 0$, $x = -1$.

б) Заметим, что $\frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, следовательно, $\log_2 \frac{1}{6} < -1 < \log_2 \frac{2}{3} < 0$. На отрезке $\left[\log_2 \frac{1}{6}; \log_2 \frac{2}{3} \right]$ лежит число -1 .

Ответ: а) $\{0; -1\}$; б) -1 .

Примечание.

Заметим, что запись $\sqrt{a^2}$ эквивалентна записи $(\sqrt{a})^2$.

№ 14.

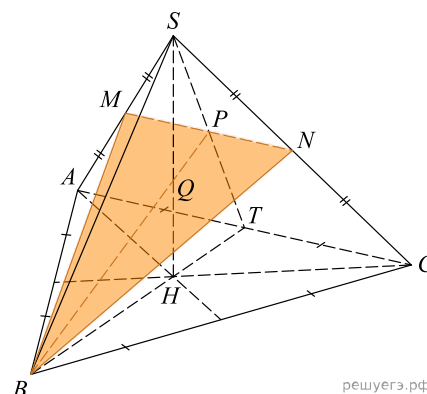
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим T середину ребра AC , P — точку пересечения прямых MN и ST , Q — точку пересечения прямых BP и SH . Прямые BP и SH лежат в плоскости SBT . Так как отрезок MN — средняя линия треугольника SAC , то точка P — середина отрезка ST . Прямая BP лежит в плоскости BMN , следовательно, точка Q есть точка пересечения плоскости BMN с высотой SH . Запишем теорему Менелая для треугольника SOT и прямой BP , получим:

$$\frac{SQ}{QH} \cdot \frac{OB}{BT} \cdot \frac{TP}{PS} = 1,$$

откуда

$$\frac{SQ}{QH} = \frac{BT}{OB} \cdot \frac{PS}{TP} = \frac{3}{2}.$$



б) Заметим, что плоскости BAC и BMN содержат по одной из пары параллельных прямых AC и MN , следовательно, линия пересечения указанных плоскостей параллельна этим прямым. Прямая BT является проекцией прямой BP на плоскость ABC . При этом прямая BT перпендикулярна прямой AC , следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, прямая BP перпендикулярна прямой AC . Таким образом, каждая из прямых BP и BT перпендикулярна линии пересечения плоскостей BAC и BMN , а потому PBT — линейный угол угла между этими плоскостями. Находим:

$$BT = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = 6\sqrt{3},$$

$$BH = \frac{2}{3} BT = 4\sqrt{3},$$

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = 4\sqrt{6}.$$

Тогда:

$$\frac{QH}{SH} = \frac{QH}{SQ+QH} = \frac{2}{5},$$

где $QH = \frac{2}{5}SH = \frac{8\sqrt{6}}{5}$. Таким образом,

$$\operatorname{tg} \angle PBT = \frac{QH}{BH} = \frac{2\sqrt{2}}{5},$$

то есть $\angle PBT = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: б) $\angle PBT = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 9x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) > 0, \\ x > 0, \\ x > \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{9} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) \geq 0,$$

$$\log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0,$$

$$a^b - a^c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\begin{aligned} \log_{\log_x 2x} (9x-4) \geq 0 &\Leftrightarrow (\log_x 2x - 1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x - \log_x x)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\log_x 2x} (9x-4) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x - 1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_x 2x - \log_x x)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{9}, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть общая сумма инвестированных денег равна $3S$, и пусть каждые три месяца акции первого АО росли на $a\%$, а акции второго АО — на $b\%$. Обозначим повышающие коэффициенты $x = 1 + \frac{a}{100}$ и $y = 1 + \frac{b}{100}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} Sx^2 + 2Sy^2 = 3S \cdot 1,98, \\ Sxy + 2Sy^2 = 3S \cdot 2,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 5,94, \\ xy + 2y^2 = 6,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0,36 + x^2, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sx^2 + 2Sy^2 = 3S \cdot 1,98, \\ Sxy + 2Sy^2 = 3S \cdot 2,1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 5,94, \\ xy + 2y^2 = 6,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0,36 + x^2, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y^2 = 2(0,36 + x^2)^2, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(5,94 - x^2) = 0,2592 + 1,44x^2 + 2x^4, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y^2 = 2(0,36 + x^2)^2, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(5,94 - x^2) = 0,2592 + 1,44x^2 + 2x^4, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 1,5x^2 + 0,0864 = 0, \\ 2y^2 = 5,94 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0,06, \\ x^2 = 1,44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,2, \\ y = 1,5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Если трейдер вложит всю сумму в акции первого АО, то вложенная сумма увеличится в x^2 раз, то есть в 1,44 раза, или на 44%.

Ответ: 44.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) По теореме косинусов получаем:

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{16 + 25 - 61}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{1}{2},$$

отсюда $\angle BAC = 120^\circ$. Треугольник BCD равносторонний, в нем угол BDC равен 60° . Тогда $\angle BAC + \angle BDC = 180^\circ$, а потому четырехугольник $ABDC$ вписан в окружность.

б) Пусть точка O — центр окружности, точка M — середина BC , точка P — точка пересечения BC и AD . Заметим, что точка O — центр равностороннего треугольника BCD , следовательно,

$$OM = \frac{1}{3}DM = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{183}}{6}.$$

По свойству вписанных углов находим:

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle CBD = \angle CAD = 60^\circ.$$

Значит, AP — биссектриса угла BAC , тогда

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC} \Leftrightarrow BP = \frac{4}{9}\sqrt{61},$$

отсюда

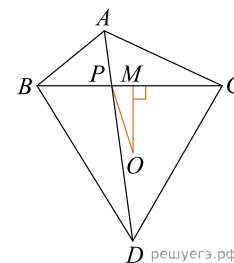
$$PM = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)BC = \frac{\sqrt{61}}{18}.$$

По теореме Пифагора получаем, что

$$PO^2 = PM^2 + MO^2 = \frac{61}{324} + \frac{183}{36} = 61 \left(\frac{1}{324} + \frac{1}{12} \right) = 61 \cdot \frac{28}{324} = \frac{427}{81}.$$

Таким образом, $PO = \frac{\sqrt{427}}{9}$.

Ответ: б) $\frac{\sqrt{427}}{9}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Уравнение имеет смысл при

$$4a - a^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3. \quad (*)$$

При таких значениях параметра уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{4a - a^2 - 3}, \\ \sqrt{(x-3)^2 + a^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение совокупности. Геометрический смысл уравнения состоит в том, что в системе координат xOa сумма расстояний от точки $(x; a)$ до точек $(3; 0)$ и $(2; 1)$ равно $\sqrt{2}$. Поскольку расстояние между точками $(3; 0)$ и $(2; 1)$ тоже равно $\sqrt{2}$, это означает, что точка $(x; a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(3; 0)$ и $(2; 1)$. Условию(*) удовлетворяет только одна точка этого отрезка — точка $(2; 1)$, принадлежащая также и прямой $x = 2$, задаваемой третьим уравнением совокупности. Таким образом, второе уравнение совокупности можно исключить, без потери или приобретения решений. Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2 - \sqrt{4a - a^2 - 3}, \\ x = 2. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{1 - (a-2)^2}, \\ x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (a-2)^2 = 1, \\ x = 2, \\ x \leq 2, \\ 1 \leq a \leq 3. \end{cases} &\begin{cases} x = 2 - \sqrt{4a - a^2 - 3}, \\ x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{1 - (a-2)^2}, \\ x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (a-2)^2 = 1, \\ x = 2, \\ x \leq 2, \\ 1 \leq a \leq 3. \end{cases} &\begin{cases} x = 2 - \sqrt{4a - a^2 - 3}, \\ x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{1 - (a-2)^2}, \\ x = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (a-2)^2 = 1, \\ x = 2, \\ x \leq 2, \\ 1 \leq a \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Графиком полученной системы на плоскости xOa является объединение левой полуокружности радиусом 1 с центром в точке $(2; 2)$ и отрезка AB прямой $x = 2$ (выделено оранжевым). Анализируя построенный график получаем, что уравнение имеет не менее двух решений на отрезке $[1,5; 2,5]$ (полоса, ограниченная прямыми $x = 1,5$ и $x = 2,5$, выделена зеленым) при $1 < a \leq a_1$ и при $a_2 \leq a < 3$, где a_1 и a_2 соответственно — ординаты точек

$$C\left(2 - \frac{1}{2}; 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

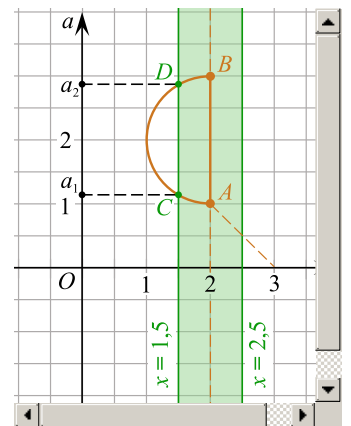
и

$$D\left(2 - \frac{1}{2}; 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

пересечения дуги окружности с прямой $x = 1,5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет не менее двух решений на отрезке $[1,5; 2,5]$ при $1 < a \leq 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и при $2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 3$.

$$\text{Ответ: } \left(1; 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; 3\right).$$



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4

Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Очевидно, если $n \geq 4$, то в $n!$ входят множители 2 и 4, поэтому $n!$ кратно 8. С другой стороны, $3! = 6$, что не кратно 8.

б) Имеем:

$$\begin{aligned}
 (n+2)! - 42n! &= (n+2)(n+1)n! - 42n! = \\
 &= n!(n^2 + 3n + 2 - 42) = n!(n^2 + 3n - 40) = n!(n+8)(n-5), \quad (n+2)! - 42n! = (n+2)(n+1)n! - 42n! = \\
 &= n!(n^2 + 3n + 2 - 42) = \\
 &= n!(n^2 + 3n - 40) = n!(n+8)(n-5),
 \end{aligned}$$

что отрицательно только при $n < 5$.

в) Ясно, что при $n \geq 13$ число $n!$ содержит множитель 13, поэтому указанное выражение кратно 13. При $n < 13$ запишем выражение как $n!(n! - 12)$ и будем последовательно проверять числа, меньшие 13.

Пусть $n = 12$, тогда первый множитель не кратен 13, а второй кратен. Действительно, (знак $\equiv$ означает, что у чисел одинаковые остатки при делении на 13):

$$\begin{aligned}
 12! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 120 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 1320 \equiv 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 441 \equiv 12, \quad 12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = \\
 &= 120 \cdot 42 \cdot 72 \cdot 1320 \equiv 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 441 \equiv 12.
 \end{aligned}$$

Следовательно, разность $12!$ и 12 при делении на 13 дает нулевой остаток, то есть делится на 13 нацело.

Проверим $n = 11$: поскольку $12!$ дает остаток 12 при делении на 13, то $11! = \frac{12!}{12}$ дает остаток 1 при делении на 13, а значит, число $11! - 12$ не будет кратно 13.

Ответ: а) 3; б) 4; в) 11.

Примечание.

Показать, что $12! - 12$ кратно 13 можно было, сославшись на теорему Вильсона: число $(p-1)! + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда p — простое. В нашем случае, число $12! - 12 = (13-1)! - (13-1)$ кратно 13.