

# Вариант 76

"

№ 1.

В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  — высота,  $AH = 12$ ,  $\cos A = \frac{2}{3}$ . Найдите  $AB$ .

" "

№ 2.

Вектор  $\vec{AB}$  с началом в точке  $A(2; 4)$  имеет координаты  $(6; 2)$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .

" "

№ 3.

Объем правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равен 12. Точка  $E$  — середина ребра  $SB$ . Найдите объем треугольной пирамиды  $EABC$ .

" "

№ 4.

Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся решит больше 10 задач, равна 0,75. Вероятность того, что учащийся верно решит больше 9 задач, равна 0,8. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 10 задач.

" "

№ 5.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

" "

№ 6.

Найдите корень уравнения  $\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}$ .

" "

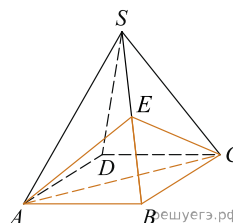
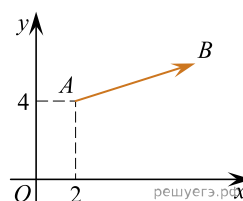
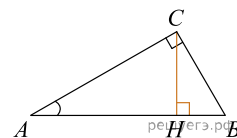
№ 7.

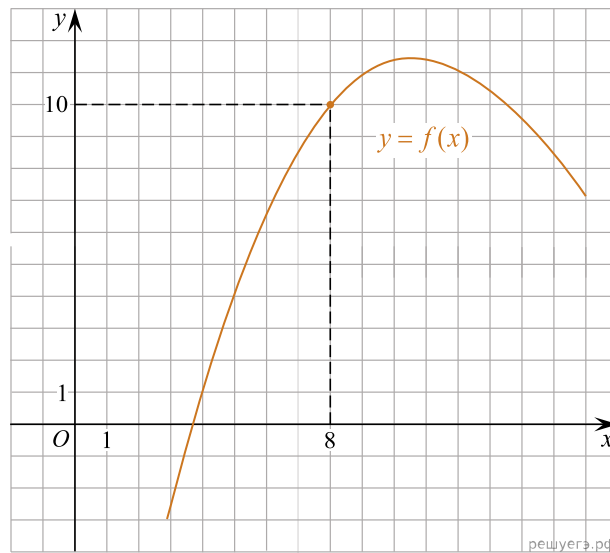
Найдите значение выражения  $4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{3}$ .

" "

№ 8.

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите  $f'(8)$ .





" "

№ 9.

Автомобиль, масса которого равна  $m = 2160$  кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение  $t$  секунд остается неизменным, и проходит за это время путь  $S = 500$  метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно  $F = \frac{2mS}{t^2}$ . Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила  $F$ , приложенная к автомобилю, не меньше 2400Н. Ответ выразите в секундах.

" "

№ 10.

Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 435км. Из города  $A$  в город  $B$  со скоростью 60км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города  $B$  выехал со скоростью 65км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города  $A$  автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

" "

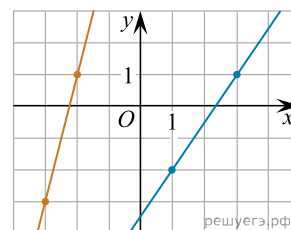
№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

" "

№ 12.

Найдите точку минимума функции  $y = -21x^2 - x^3 + 32$ .



" "

№ 13.

а) Решите уравнение  $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x \cdot \operatorname{tg} x}} = 0$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

" "

№ 14.

Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину  $S$  этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64.

а) Докажите, что боковое ребро этой пирамиды больше, чем сторона основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

" "

№ 15.

Решите неравенство  $\frac{\log_{6-x}(x^2 - 2x + 1)}{\log_3(x - 1) - 2} \geq 0$ .

" "

**№ 16.**

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 720 тыс. руб. Условия его возврата таковы:  
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;  
— в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остается равным 720 тыс. руб.;  
— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;  
— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.  
Найдите общую сумму платежей за пять лет.

" "

**№ 17.**

На окружности с центром  $O$  и диаметром  $MN$ , равным 34, взята точка  $K$  на расстоянии 15 от этого диаметра. Хорда  $KE$  пересекает радиус  $OM$  в точке  $F$  под углом, равным  $\arccos \frac{4}{5}$ .

- Докажите, что  $KF : FE = 125 : 29$ .
- Найдите площадь треугольника  $KEN$ .

" "

**№ 18.**

Найдите все значений  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0, \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

" "

**№ 19.**

Для любого натурального числа  $n$  ( $n \geq 1$ ) обозначим через  $O(n)$  количество нечётных цифр в десятичной записи этого числа. Например,  $O(123) = 2$ , а  $O(2048) = 0$ .

- Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(4 \cdot n) = O(n) + 2$ ?
- Существует ли такое натуральное число  $n$ , что  $O(5^n + 2^{n+1} - 2) > n$ ?
- Для какого наименьшего натурального числа  $n$  выполнено равенство  $O(11 \cdot n) = O(n) + 2$ ?

"

# Ответы

| Номер | Задание                | Ответ |
|-------|------------------------|-------|
| 1     | <a href="#">27432</a>  | 27    |
| 2     | <a href="#">27724</a>  | 8     |
| 3     | <a href="#">27114</a>  | 3     |
| 4     | <a href="#">683036</a> | 0,05  |
| 5     | <a href="#">510117</a> | 0,65  |
| 6     | <a href="#">26660</a>  | 87    |
| 7     | <a href="#">26759</a>  | 2     |
| 8     | <a href="#">40129</a>  | 1,25  |
| 9     | <a href="#">27989</a>  | 30    |
| 10    | <a href="#">99590</a>  | 240   |
| 11    | <a href="#">509197</a> | -5    |
| 12    | <a href="#">127445</a> | -14   |

№ 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                     | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах                                                                                                                                                         | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом<br>имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и<br>пункта б) | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                        | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                          | 2     |

**Решение.** а) Уравнение определено при условии

$$2025 - 2025 \sin x > 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 1.$$

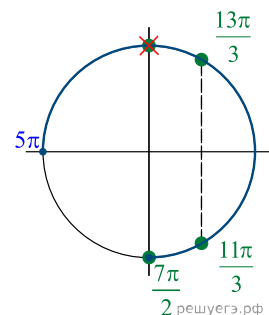
Применим формулы приведения, получим:

$$\frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \end{cases} \frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \end{cases} \frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$$

б) Отберем корни при помощи единичной окружности. Подходят числа:  $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$ .

Ответ: а)  $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б)  $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$ .

№ 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                 | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                    | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                          | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                      | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3     |

**Решение.** а) Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания  $AC$  равна  $8\sqrt{2}$ . Пусть  $SH$  — высота пирамиды. Тогда площадь сечения, проходящего через  $S$  и диагональ  $AC$ , равна  $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$ , откуда

$$SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}.$$

Пусть  $SM$  — высота грани  $SAB$ . Тогда

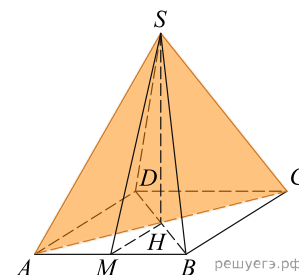
$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Тогда  $AS > SM = 12 > 8 = AB$ . Что и требовалось доказать.

б) Все подготовительные вычисления сделаны в пункте а), теперь можно найти площадь боковой поверхности:

$$S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48.$$

Поэтому  $S_{\text{бок}} = 48 \cdot 4 = 192$ .



№ 15.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                               | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                     | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,<br>или<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                 | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                             | 2     |

**Решение.** Запишем число 2 в виде  $\log_3 9$  и применим метод рационализации:

$$\frac{\log_{6-x}(x^2 - 2x + 1)}{\log_3(x-1) - \log_3 9} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(6-x-1)(3-1)(x-1-9)} \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ 6-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-2)}{(5-x)(x-10)} \geq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{5-x} \leq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 5, \end{cases} \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ 5 < x < 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-2)}{(5-x)(x-10)} \geq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{5-x} \leq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 5, \end{cases} \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ 5 < x < 6. \end{cases}$$

Ответ:  $(1; 2] \cup (5; 6)$ .

№ 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                            | 2     |

**Решение.** Пусть  $k = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$ , а  $x$  тыс.руб.— платежи 2030 и 2031 годов. В июле 2027, 2028, 2029 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют  $720(k-1)$  тыс. руб. В январе 2030 года долг (в тыс. руб.) будет равен  $720k$ , а в июле—  $720k - x$ . В январе 2031 года долг будет равен  $720k^2 - kx$ , а в июле—  $720k^2 - (k+1)x$ . По условию к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью. Значит,

$$720k^2 - (k+1)x = 0 \Leftrightarrow 720k^2 = (k+1)x \Leftrightarrow x = \frac{720k^2}{k+1}.$$

Таким образом, общая сумма выплат составляет  $3 \cdot 720(k-1) + 2x$ , то есть

$$3 \cdot 720(k-1) + 2 \cdot \frac{720k^2}{k+1} = 3 \cdot 720 \cdot 0,25 + 2 \cdot \frac{720 \cdot 1,5625}{2,25} = 1540 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1540 тыс. руб.

№ 17.

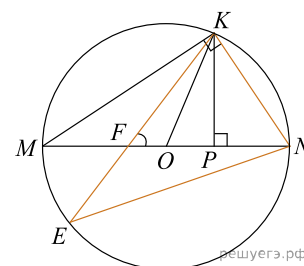
| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                                | 3        |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br><br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                              | 2        |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br><br>ИЛИ<br><br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br><br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                 | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>3</b> |

**Решение.** а) Пусть  $KP$  — высота треугольника  $MKN$ . Из прямоугольных треугольников  $KOP$  и  $KPF$  находим, что

$$OP = \sqrt{OK^2 - KP^2} = 8,$$

$$KF = \frac{KP}{\sin \angle KFN} = 25,$$

$$PF = KF \cdot \cos \angle KFN = 20.$$



Отрезок  $PF$  длиннее радиуса окружности. Значит, точки  $F$  и  $P$  лежат по разные стороны от точки  $O$ . Тогда

$$NF = NO + OF = 29,$$

$$FM = MN - NF = 5.$$

По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд получаем, что

$$KF \cdot FE = NF \cdot FM,$$

откуда находим, что

$$FE = \frac{NF \cdot FM}{KF} = \frac{29 \cdot 5}{25} = \frac{29}{5} \Leftrightarrow \frac{KF}{FE} = \frac{125}{29}.$$

б) Для нахождения площади треугольника  $KEN$  воспользуемся формулой

$$S_{KEN} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot EN \cdot \sin \angle KEN.$$

Имеем

$$KE = KF + FE = 30,8.$$

Из треугольника  $KOP$  находим, что

$$\cos \angle KOP = \frac{OP}{OK} = \frac{8}{17}.$$

Так как

$$\angle KEN = \frac{1}{2} \angle KON = \frac{1}{2} \angle KOP,$$

получаем, что

$$\sin \angle KEN = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle KOP}{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Из треугольника  $EFN$  получаем, что

$$EN^2 = EF^2 + FN^2 - 2 \cdot EF \cdot FN \cdot \cos \angle EFN \Leftrightarrow EN^2 = 1143,76 \Leftrightarrow EN = 5,8\sqrt{34}. \quad EN^2 = EF^2 + FN^2 - 2 \cdot EF \cdot FN \cdot \cos \angle EFN \Leftrightarrow \Leftrightarrow EN^2 = 1143,76 \Leftrightarrow EN = 5,8\sqrt{34}.$$

Тогда

$$S_{KEN} = \frac{1}{2} \cdot 30,8 \cdot 5,8\sqrt{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = 267,96.$$

Ответ: б) 267,96.

**Приведем решение пункта б) Ирины Шраго.**

Найдем площадь треугольника  $FKN$ :

$$S_{FKN} = \frac{1}{2} \cdot FN \cdot KP = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 15.$$

Отношение площадей треугольников  $FKN$  и  $FNE$  равно отношению их оснований, следовательно,

$$\frac{S_{FKN}}{S_{FNE}} = \frac{KF}{FE} \Leftrightarrow S_{FNE} = S_{FKN} : \frac{KF}{FE} = \frac{29 \cdot 15}{2} : \frac{125}{29} = \frac{3 \cdot 29 \cdot 29}{2 \cdot 25}.$$

Тогда

$$S_{KEN} = S_{FKN} + S_{FEN} = \frac{29 \cdot 15}{2} + \frac{3 \cdot 29 \cdot 29}{2 \cdot 25} = 267,96.$$

**№ 18.**

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                 | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                       | 4     |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = -4$ и/или $a = -2$                                   | 3     |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-4; -2)$ множества значений $a$ , возможно, с включением/исключением граничных точек                                                | 2     |
| Верно найдено хотя бы одно из значений $a$ : $a = -2$ или $a = 0$ ;<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                    | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                      | 4     |

**Решение.** Преобразуем первое уравнение системы:

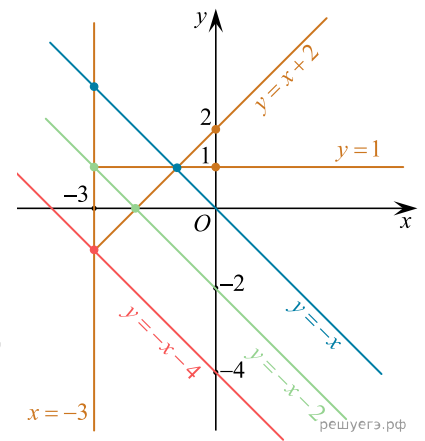
$$(y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ y = 1, \\ x = -3, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Исходная система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда графики функций  $y = x + 2$  и  $y = 1$  и прямая  $x = -3$  имеют с прямой  $y = -x + a$  две различных точки пересечения на области  $x \geq -3$  (см. рис.).

Из рисунка видно, что

- при  $a \leq -4$  система имеет одно решение;
- при  $-4 < a \leq -2$  — **два решения**;
- при  $-2 < a < 0$  — три решения;
- при  $a = 0$  — **два решения**;
- при  $a > 0$  — три решения.



Ответ:  $-4 < a \leq -2$ ;  $a = 0$ .

**Приведём другое (аналитическое) решение.**

Запишем первое уравнение в виде  $(y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3} = 0$ . Решения первого уравнения системы совпадают с решениями уравнений  $y = 1$ ,  $y = x + 2$  и  $x = -3$  при условии  $x \geq -3$ .

При  $x = -3$  уравнение  $a - x - y = 0$  имеет единственное решение при любом значении  $a$ .

При  $y = 1$  уравнение  $a - x - y = 0$  принимает вид  $a - x - 1 = 0$ , откуда  $x = a - 1$ . С учётом условия  $x \geq -3$  получаем, что при  $a < -2$  решений нет, а при  $a \geq -2$  имеется одно решение.

При  $y = x + 2$  уравнение  $a - x - y = 0$  принимает вид  $a - x - x - 2 = 0$ , откуда  $x = \frac{a}{2} - 1$ . С учётом условия  $x \geq -3$  получаем, что при  $a < -4$  решений нет, а при  $a \geq -4$  имеет одно решение.

Определим значения  $a$ , при которых возможны совпадения решений из трёх разобранных выше случаев. Имеем: либо  $x = -3$ ,  $y = 1$ , откуда  $a = -2$ ; либо  $x = -3$ ,  $y = x + 2 = -1$ , откуда  $a = -4$ ; либо  $y = 1$ ,  $y = x + 2$ , откуда  $x = -1$ ,  $a = 0$ .

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при  $a \leq -4$ , имеет два решения при  $-4 < a \leq -2$  и  $a = 0$ , имеет три решения при  $-2 < a < 0$  и  $a > 0$ .

Ответ:  $-4 < a \leq -2$ ;  $a = 0$ .

**№ 19.**

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                       | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i> .                                                                                                               | 4     |
| Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>а</i> и <i>в</i> .                                                 | 3     |
| Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>б</i> , пункты <i>а</i> и <i>в</i> не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте <i>в</i> , пункты <i>а</i> и <i>б</i> не решены. | 2     |
| Приведён пример в пункте <i>а</i> , пункты <i>б</i> и <i>в</i> не решены.                                                                                                                    | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                         | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                            | 4     |

**Решение.** а) Да. Например, при  $n = 44$  имеем

$$O(4 \cdot n) = O(176) = 2 = O(44) + 2 = O(n) + 2.$$

б) Для любого натурального  $n$  имеем  $5^n + 2^{n+1} - 2 < 10^n$ , поскольку

$$10^n - 5^n - 2 \cdot 2^n + 2 = (5^n - 2)(2^n - 1) > 0.$$

Значит, в числе  $5^n + 2^{n+1} - 2$  не более  $n$  цифр. Следовательно,  $O(5^n + 2^{n+1} - 2) \leq n$  и искомого значения  $n$  не существует.

в) Если  $1 \leq n \leq 9$ , то

$$O(11 \cdot n) = 2 \cdot O(n) < O(n) + 2.$$

Если  $10 \leq n \leq 19$  и  $n$  чётно, то  $O(n) = 1$ , а число  $11 \cdot n$  чётное и трёхзначное. Отсюда получаем, что в этом случае

$$O(n) + 2 = 3 > O(11 \cdot n).$$

Если  $10 \leq n \leq 19$  и  $n$  нечётно,  $O(n) = 2$ , а число  $11 \cdot n$  трёхзначное. Отсюда получаем, что в этом случае

$$O(n) + 2 = 4 > 3 \geq O(11 \cdot n).$$

Если  $20 \leq n \leq 27$  и  $n$  чётно, то все цифры чисел  $n$  и  $11 \cdot n$  также чётные. Отсюда получаем, что в этом случае

$$O(n) + 2 = 2 > 0 = O(11 \cdot n).$$

Если  $20 \leq n \leq 27$  и  $n$  нечётно, то  $200 < 11 \cdot n < 300$ . Отсюда получаем, что в этом случае первая цифра трёхзначного числа  $11 \cdot n$  равна 2 и

$$O(n) + 2 = 3 > O(11 \cdot n).$$

При  $n = 28$  имеем

$$O(11 \cdot n) = O(308) = 1 < 2 = O(28) + 2 = O(n) + 2.$$

При  $n = 29$  имеем

$$O(11 \cdot n) = O(319) = 3 = O(29) + 2 = O(n) + 2.$$

Значит, искомое наименьшее значение  $n$  равно 29.

Ответ: а) да; б) нет; в) 29.

---