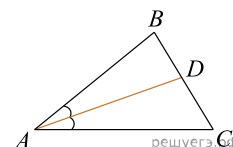


Вариант 77

№ 1.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Найдите угол ABD , если угол BAD равен 29° и угол ACB равен 55° .



№ 2.

Даны векторы $\vec{a}(3; 4)$ и $\vec{b}(-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

№ 3.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и $B_1 D_1$. Ответ дайте в градусах.

№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

№ 5.

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№ 6.

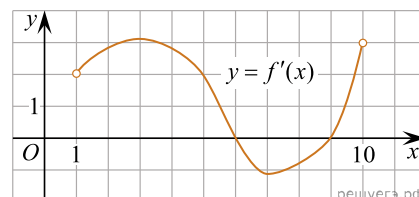
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{3} - \sqrt{12} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



№ 9.

Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров?

№ 10.

Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу

за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

..

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

..

№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 15 + 12x + x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.

..

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

..

№ 14.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через точку M пересечения медиан грани SBC перпендикулярно плоскости основания проходит плоскость α , делящая AB в отношении $2 : 1$, считая от вершины A .

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку C .

б) Найдите расстояние от точки пересечения медиан грани ADS до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{10}$.

..

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{(\sqrt{7})^x + \frac{1}{2}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}$.

..

№ 16.

В одной стране в обращении находилось 1000000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны 50000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5% от общего количества долларов?

..

№ 17.

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

..

№ 18.

Найти все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

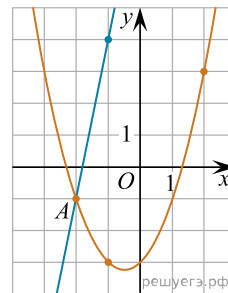
имеет более двух точек экстремума.

..

№ 19.

У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объемов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 2 литра воды, если сначала у него были ведра объемом 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом 8 литров?



б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объемы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объемами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом 10 литров?

в) Сначала у Бори были ведра объемами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объемом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Боря сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из ведер?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	681454	67
2	649915	-0,96
3	316554	60
4	282854	0,5
5	320751	0,6
6	26653	4
7	245172	-1,5
8	501188	9
9	500252	2,4
10	99569	11
11	509149	6
12	530400	-17

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что $\sin\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$. Преобразуем уравнение:

$$8 \sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 8 \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 8 \sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) - 1 \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

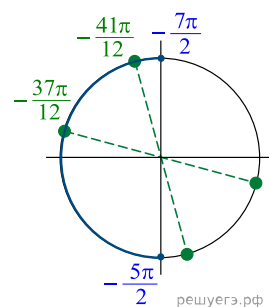
$$\Leftrightarrow 4 \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) - 1 \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos 2x - 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 4 - 2\sqrt{3} \cos 2x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos 2x - 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow$$



решуегэ.рф

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности (см.рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа $-\frac{41\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{41\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}$.

Примечание.

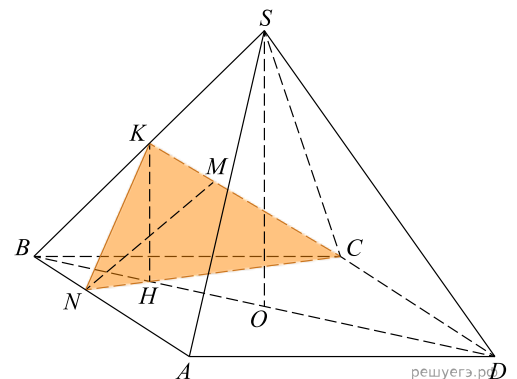
Ответ в пункте а) можно записать и в другой форме. Например, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, x = \frac{7\pi}{12} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость α пересекает ребро AB в точке N , а точка K — середина ребра BS . Построим сечение пирамиды плоскостью KCN (см.рис.). Пусть прямая CN пересекает диагональ основания пирамиды BD в точке H . Треугольники BNH и DCH подобны с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{3}$, потому что $\frac{BN}{DC} = \frac{BN}{AB} = \frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{BH}{HD} = \frac{1}{3}$ и $BH = HO$, где точка O — центр основания пирамиды.

Отрезок KH — средняя линия треугольника BSO , прямые KH и SO параллельны. Отсюда следует, что эти прямые также перпендикулярны, потому что отрезок SO — высота пирамиды, то есть прямая KH перпендикулярна плоскости основания $ABCD$. Точка M принадлежит плоскости KCN , а прямая MN не перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Таким образом, плоскости KCN и α совпадают, откуда и следует требуемое.

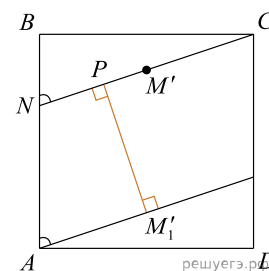


б) Пусть M_1 — точка пересечения медиан треугольника ADS . Пусть также точки M' и M'_1 — проекции точек M и M_1 соответственно на плоскость основания $ABCD$.

Выберем на прямой CN точку P такую, что прямые M'_1P и CN перпендикулярны. Прямая $M_1M'_1$ параллельна плоскости, поэтому отрезок M'_1P есть искомое расстояние. Вычислим длину отрезка CN по теореме Пифагора из треугольника BCN :

$$CN = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2} = \sqrt{40 + \frac{40}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}.$$

$$CN = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2} = \sqrt{40 + \frac{40}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}.$$



Найдем искомое расстояние:

$$M'_1P = AN \cdot \angle BAM'_1 = AN \cdot \sin \angle BNC = \frac{2}{3}AB \cdot \frac{AB}{CN} = \frac{2}{3} \cdot (2\sqrt{10})^2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{1}{10} \cdot 40 = 4. \quad M'_1P = AN \cdot \angle BAM'_1 = AN \cdot \sin \angle BNC =$$

$$= \frac{2}{3}AB \cdot \frac{AB}{CN} = \frac{2}{3} \cdot (2\sqrt{10})^2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{1}{10} \cdot 40 = 4.$$

Ответ: б) 4.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\log_{(\sqrt{7})^x + \frac{1}{2}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{7^{\frac{2x+1}{4}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2x+1} \cdot \left(\frac{2}{x^2+x} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x-x^2}{(2x+1)(x^2+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x(2x+1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1, \\ -\frac{1}{2} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $[-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Ежемесячное увеличение валютной массы, находящейся в обращении, составляет $100 - 50 = 50$ тыс. долларов, поэтому через n месяцев в стране будет $(1000 + 50n)$ тыс. долларов.

Количество фальшивых долларов ежемесячно уменьшается на $50 \cdot 0,3 - 100 \cdot 0,1 = 15 - 10 = 5$ тыс. долларов. Изначально их было $1\,000\,000 \cdot 0,2 = 200\,000$, поэтому через n месяцев в стране будет $(200 - 5n)$ тыс. фальшивых долларов.

Через n месяцев фальшивые доллары составили 5% от общего количества долларов. Имеем:

$$(1000 + 50n) \cdot 0,05 = 200 - 5n \Leftrightarrow 50 + 2,5n = 200 - 5n \Leftrightarrow 7,5n = 150 \Leftrightarrow n = 20. \quad (1000 + 50n) \cdot 0,05 = 200 - 5n \Leftrightarrow 50 + 2,5n = 200 - 5n \Leftrightarrow 7,5n = 150 \Leftrightarrow n = 20.$$

Ответ: через 20 месяцев.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Пусть вписанная окружность касается основания BC в точке G , а основания AD — в точке F . Пусть также $AM = AF = 6x$, $GC = CN = 2y$. Тогда $MB = BG = x$ и $FD = DN = 3y$. Отрезок GF — диаметр окружности, а следовательно, высота трапеции. Тогда, записав две теоремы Пифагора, получим, что

$$GF^2 = AB^2 - (AF - BG)^2 = CD^2 - (DF - CG)^2,$$

откуда

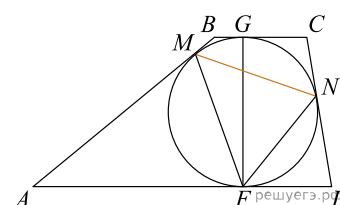
$$(7x)^2 - (5x)^2 = (5y)^2 - y^2,$$

значит, $x = y$. Следовательно,

$$AD = 6x + 3y = 9y = 3(x + 2y) = 3BC.$$

Что и требовалось доказать.

б) Из решения пункта а) получим, что



$$(7x)^2 - (5x)^2 = (5y)^2 - y^2$$

$$(1x) - (2x) = (2\sqrt{10}) ;$$

откуда $24x^2 = 420$, то есть

$$x = \sqrt{\frac{35}{2}},$$

$$\cos \angle A = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

$$\cos \angle D = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

По формуле косинуса двойного угла находим:

$$1 - 2\cos^2 \angle AFM = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \cos \angle AFM = \sqrt{\frac{1}{7}}.$$

Аналогично $\cos \angle DFN = \sqrt{\frac{2}{5}}$, и тогда

$$FM = 2AF \cdot \cos \angle AFM = 6\sqrt{10}.$$

Аналогично $FN = 2FD \cdot \cos \angle DFN = 6\sqrt{7}$.

Далее заметим, что по свойству угла между касательной и хордой $\angle DFN = \angle FMN$ и $\angle AFM = \angle FNM$. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} MN &= MF \cdot \cos \angle FMN + FN \cdot \cos \angle FNM = 6\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 6\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} = 12 + 6 = 18. \\ MN &= MF \cdot \cos \angle FMN + FN \cdot \cos \angle FNM = \\ &= 6\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 6\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} = 12 + 6 = 18. \end{aligned}$$

Ответ: б) 18.

№ 18.

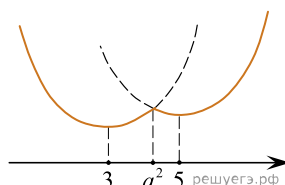
Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

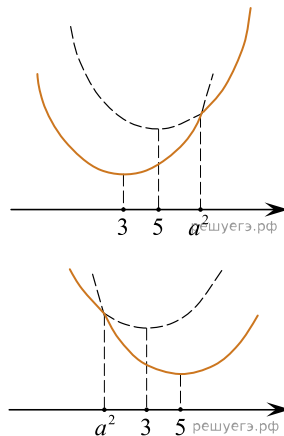
Решение. 1. Функция $f(x)$ имеет вид

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$.

2. Все возможные виды графиков функции показаны на рисунках:





Графики обеих квадратичных функции проходят через точку $(a^2, f(a^2))$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1):

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}$; $\sqrt{3} < a < \sqrt{5}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Будем записывать тройку чисел, показывающих количество воды после каждой операции: первое число — вода в самом большом ведре, второе — в среднем, третье — в маленьком.

а) Имеем: $0, 7, 4 \mapsto 7, 0, 4 \mapsto 7, 4, 0 \mapsto 3, 4, 4 \mapsto 3, 7, 1 \mapsto 8, 2, 1$.

б) Заметим, что после каждого действия есть либо полное ведро, либо пустое ведро. Поэтому добиться ситуации $4, 4, 4$ для ведер объемом $10, 7, 5$ невозможно.

в) Если третье ведро имеет объем 9 литров, то объемы воды во всех ведрах будут всегда кратны 3. Если оно имеет больший объем, то его можно уменьшить до 9 литров и повторить все операции (поскольку всего есть только 9 литров воды, переполнить его не получится). Если же третье ведро имеет объем 8 литров, то это возможно, например, так:

$$0, 6, 3 \mapsto 6, 0, 3 \mapsto 8, 0, 1 \mapsto 8, 1, 0 \mapsto 5, 1, 3 \mapsto 5, 4, 0.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.