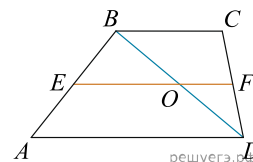


Вариант 80

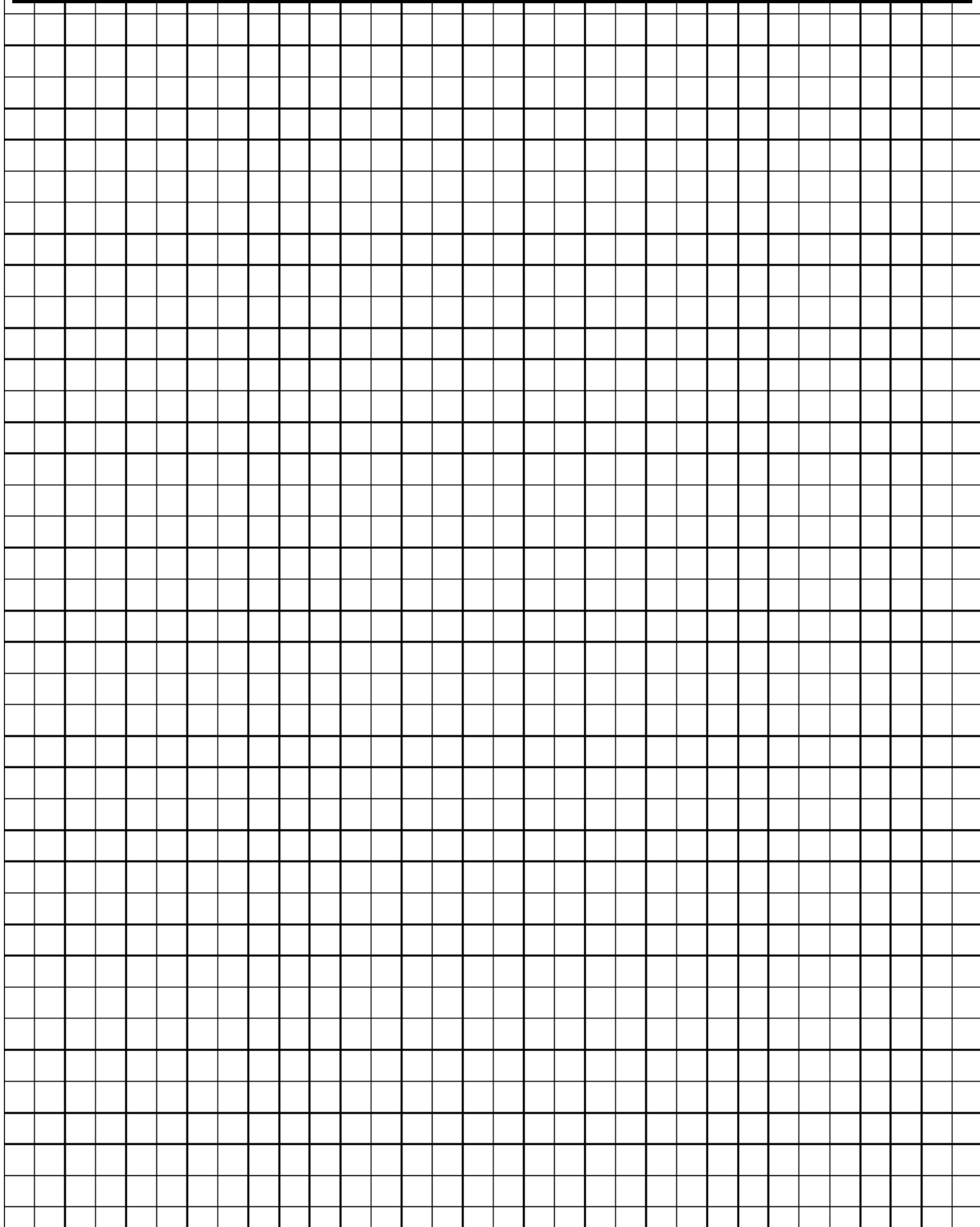
№ 1.

Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



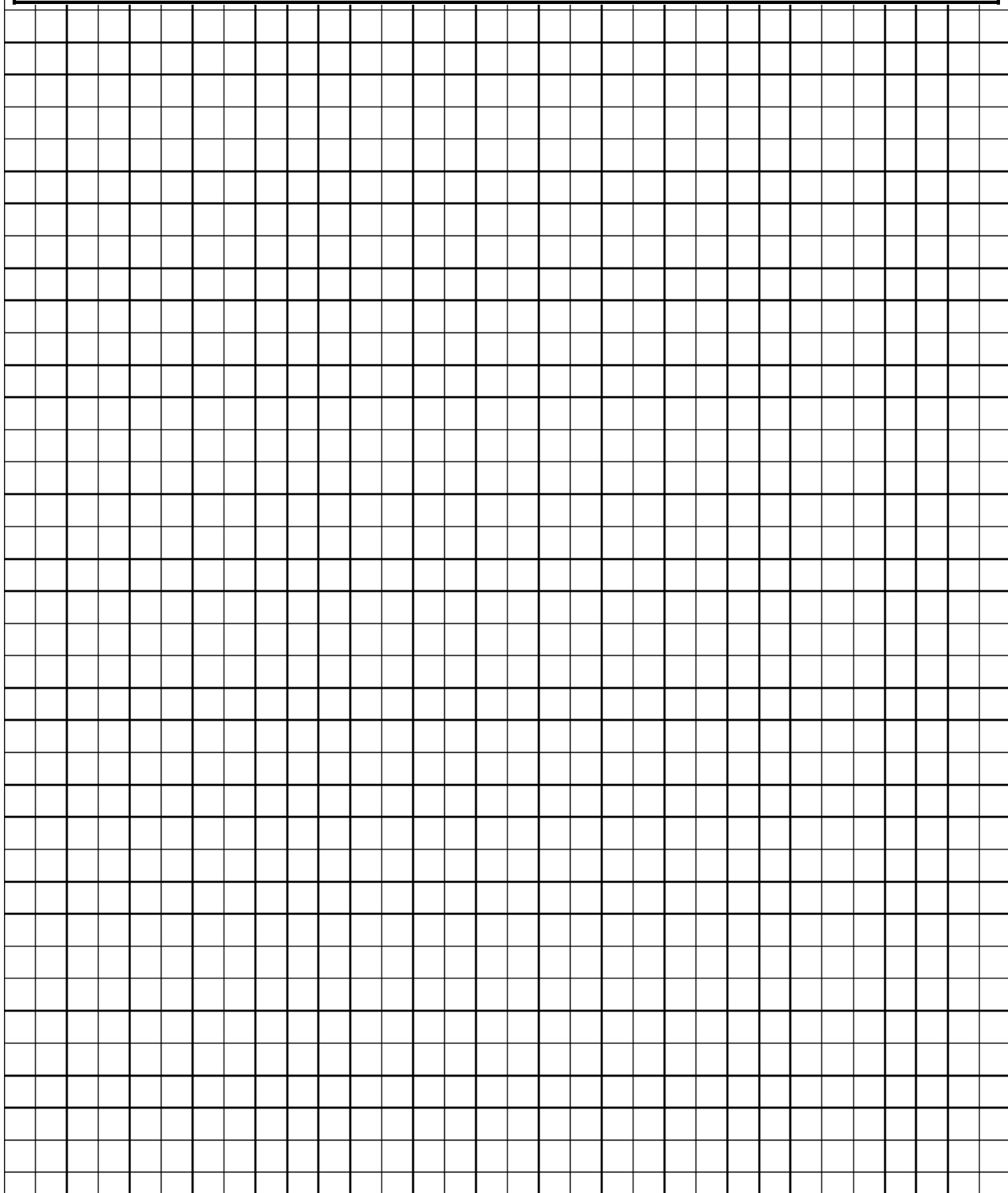
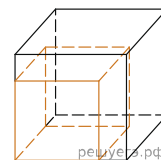
№ 2.

Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45° , а скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.



№ 3.

Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.



№ 4.

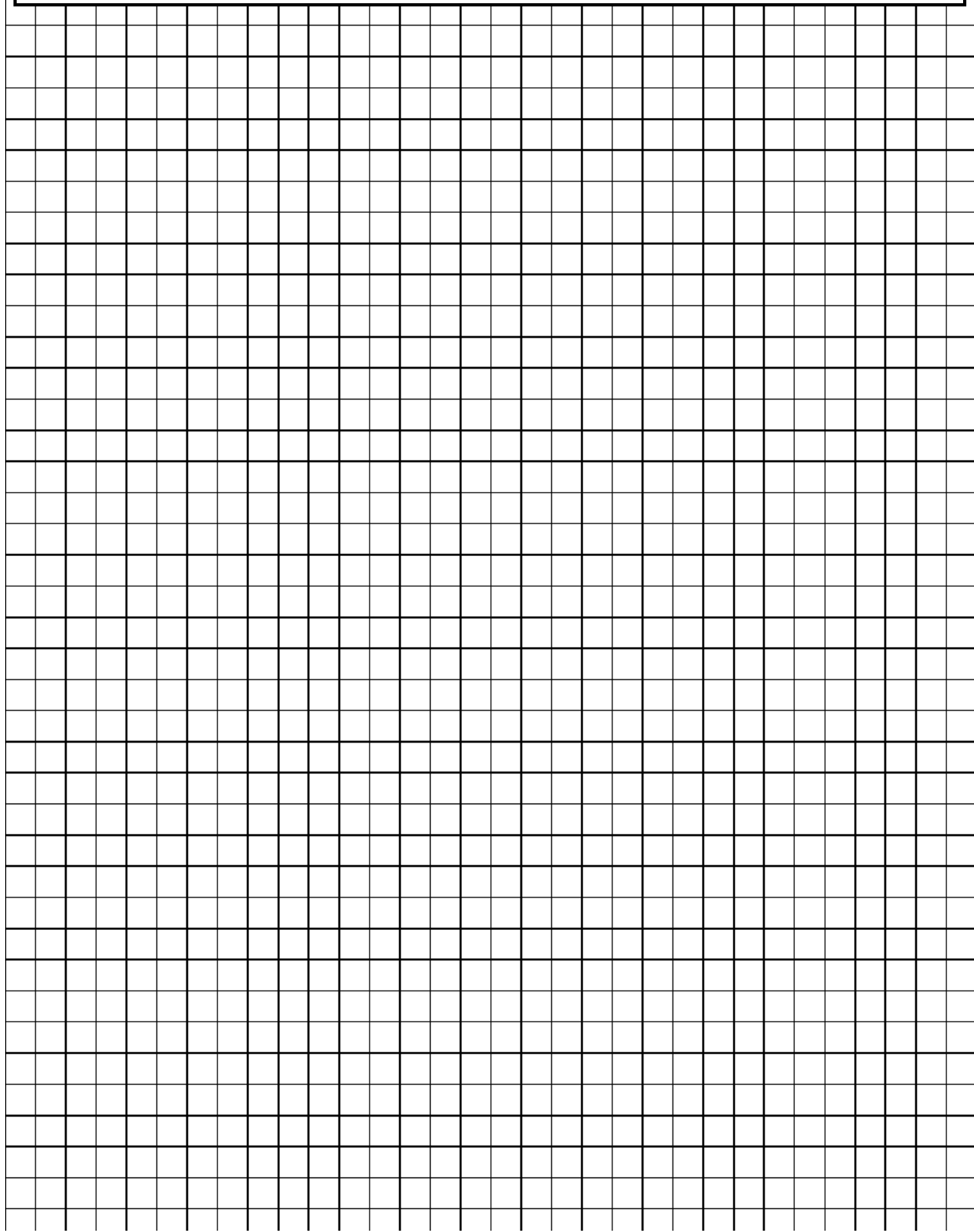
В коробке лежат красные пуговицы, столько же белых, 18 жёлтых и 36 зелёных — всего 100 пуговиц. Портной достаёт из коробки одну случайную пуговицу. Какова вероятность того, что она окажется красной или жёлтой?

№ 5.

Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,07. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

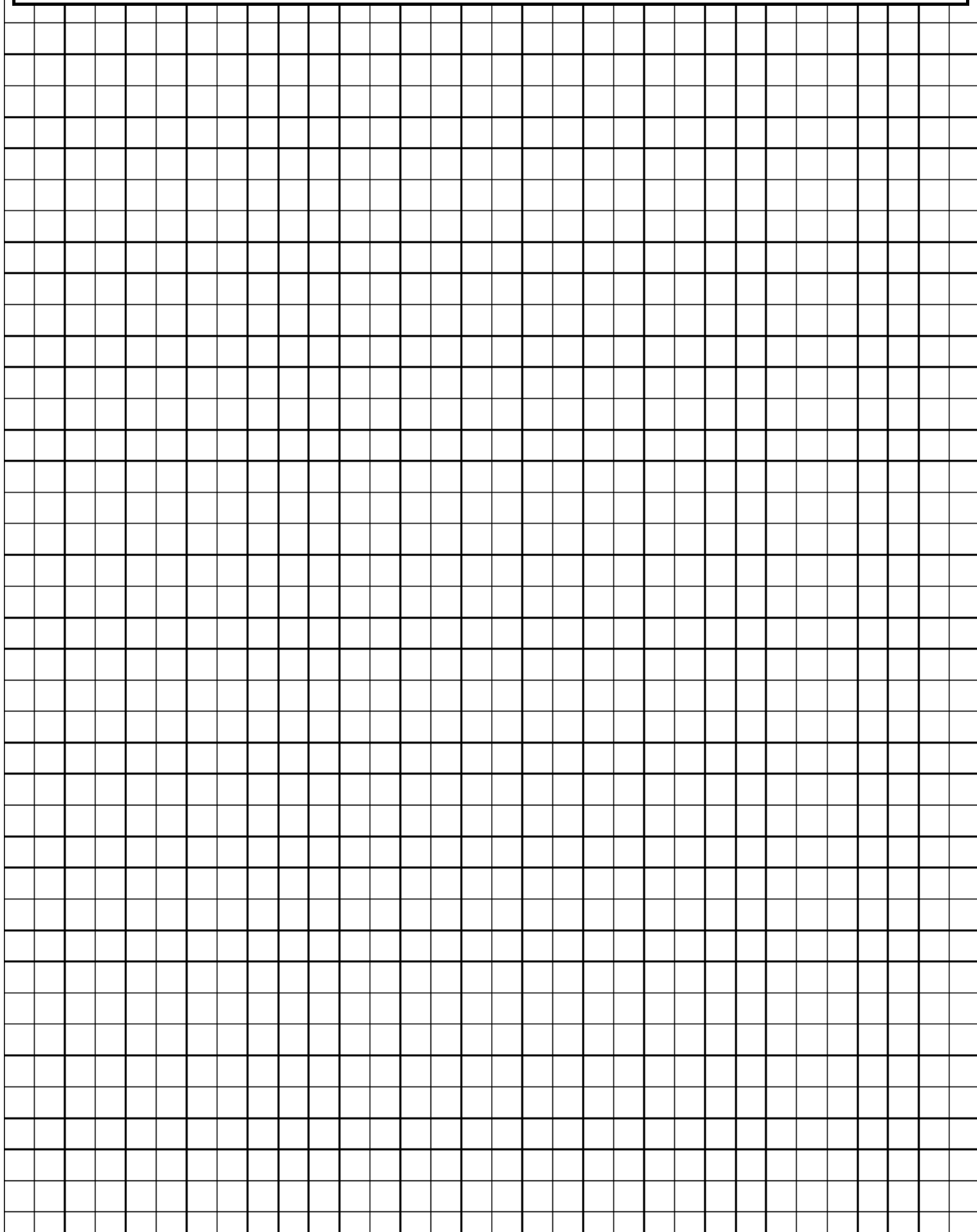
№ 6.

Найдите корень уравнения $\frac{x+89}{x-7} = \frac{-5}{x-7}$.



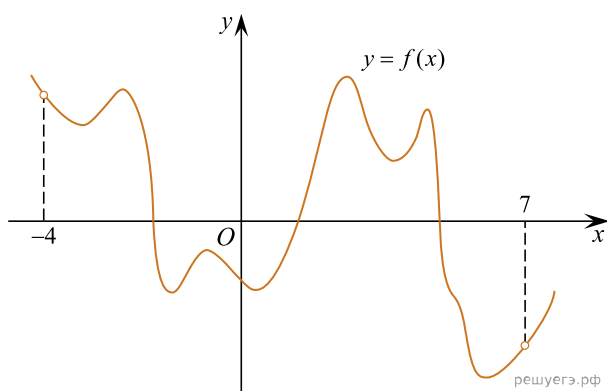
№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{5 \operatorname{tg} 163^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ}$.



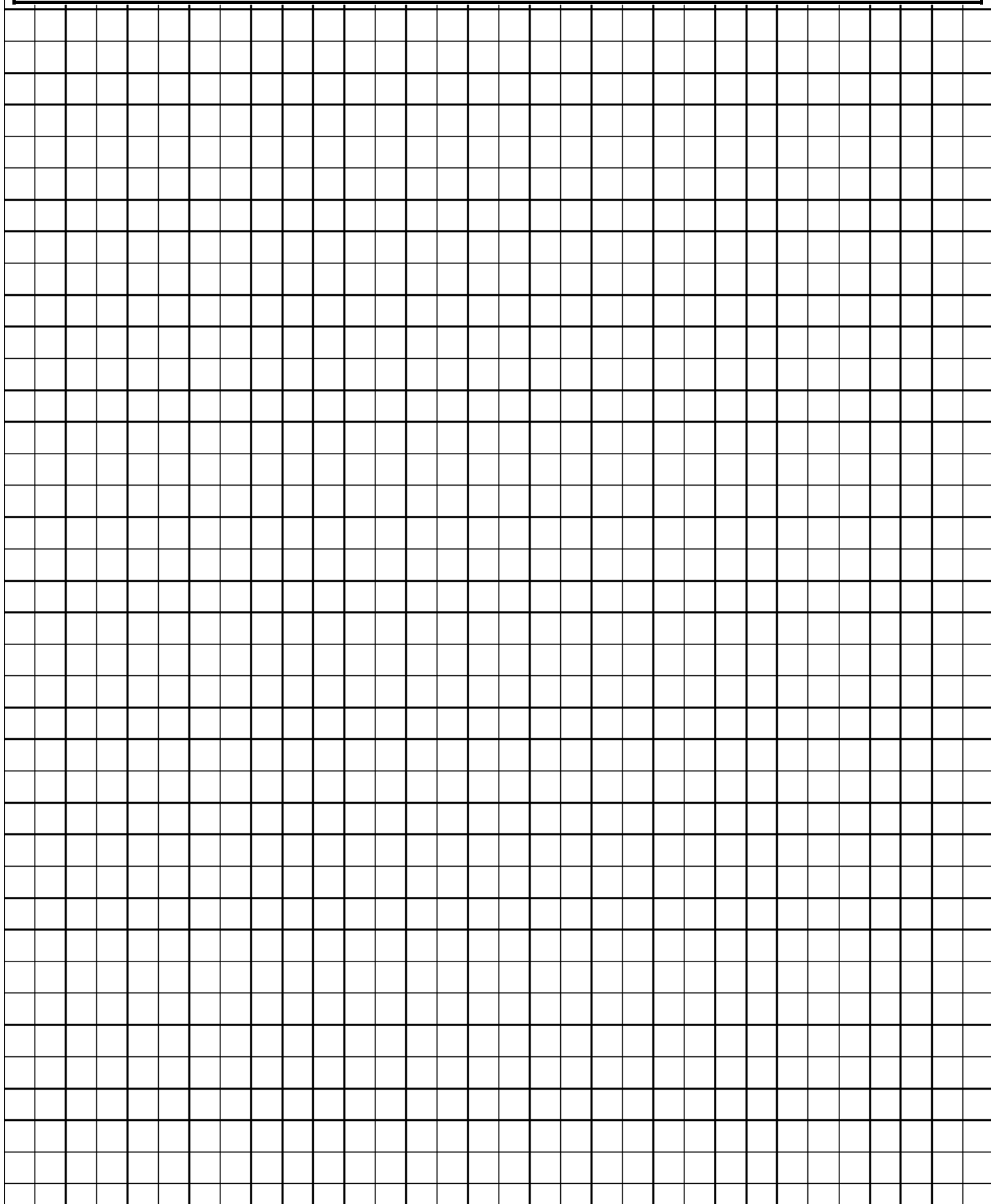
№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-4; 7)$.



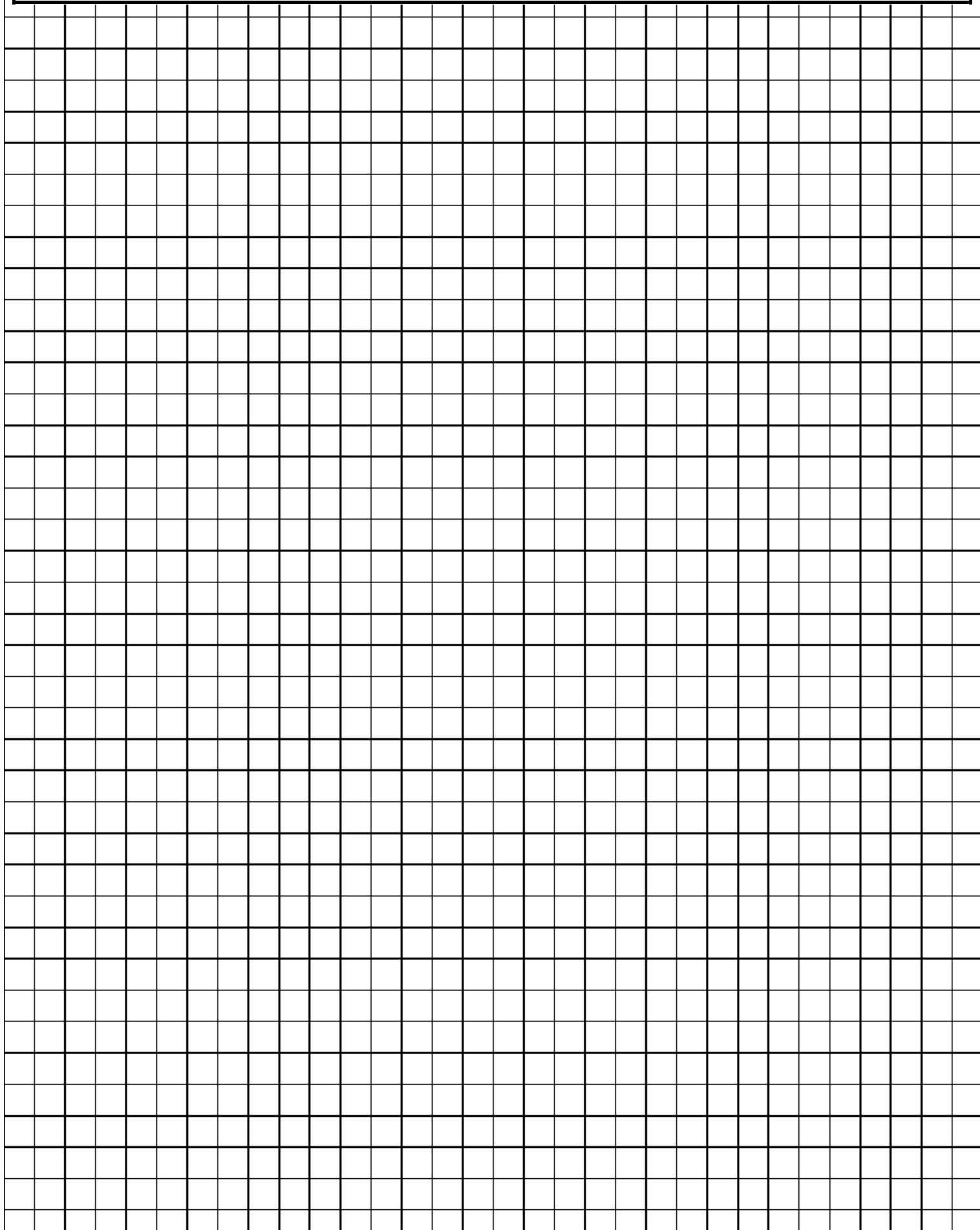
№ 9.

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, где p — давление газа в паскалях, V — объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$.



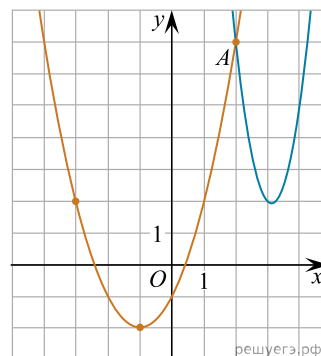
№ 10.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.



№ 11.

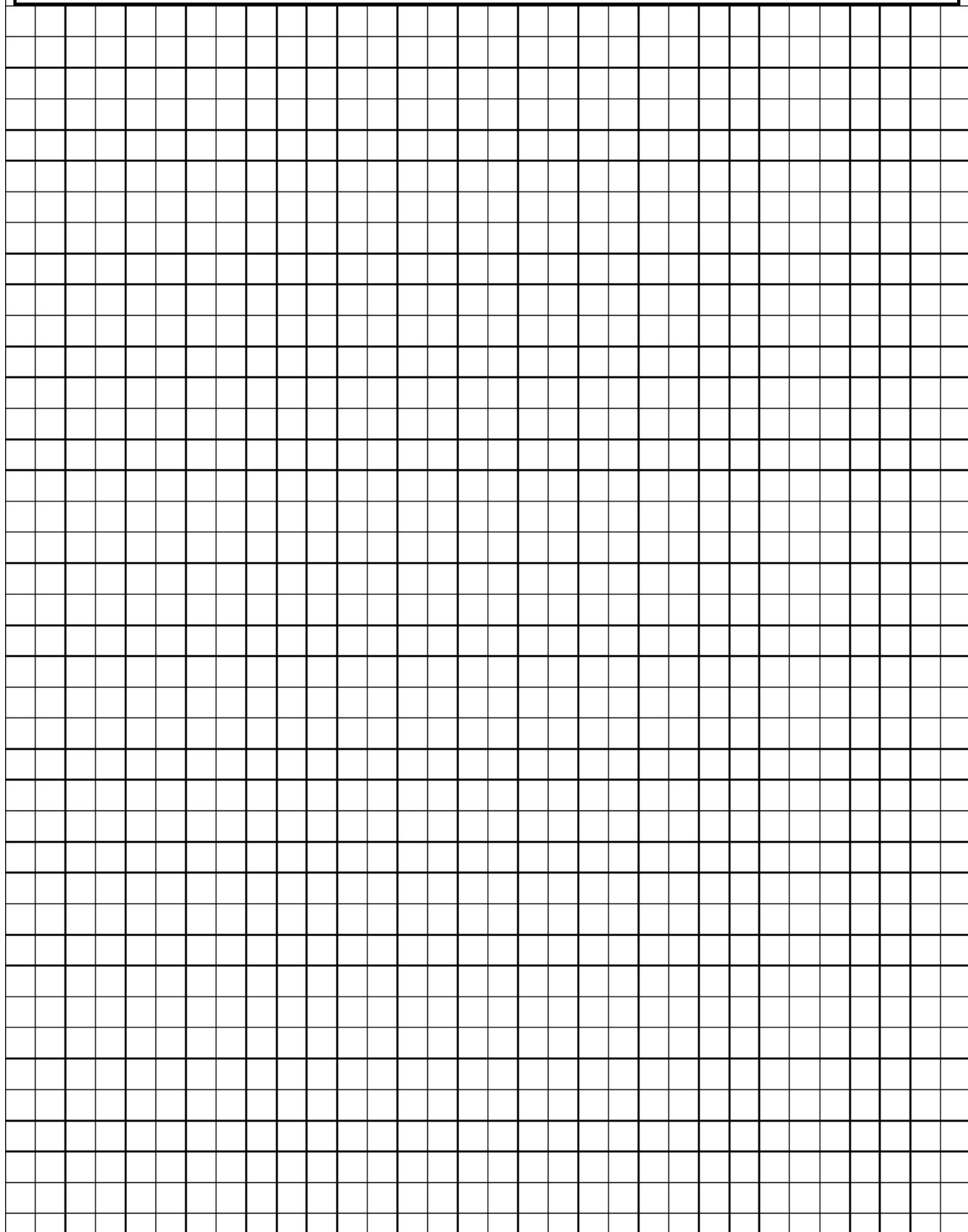
На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



решуегэ.рф

№ 12.

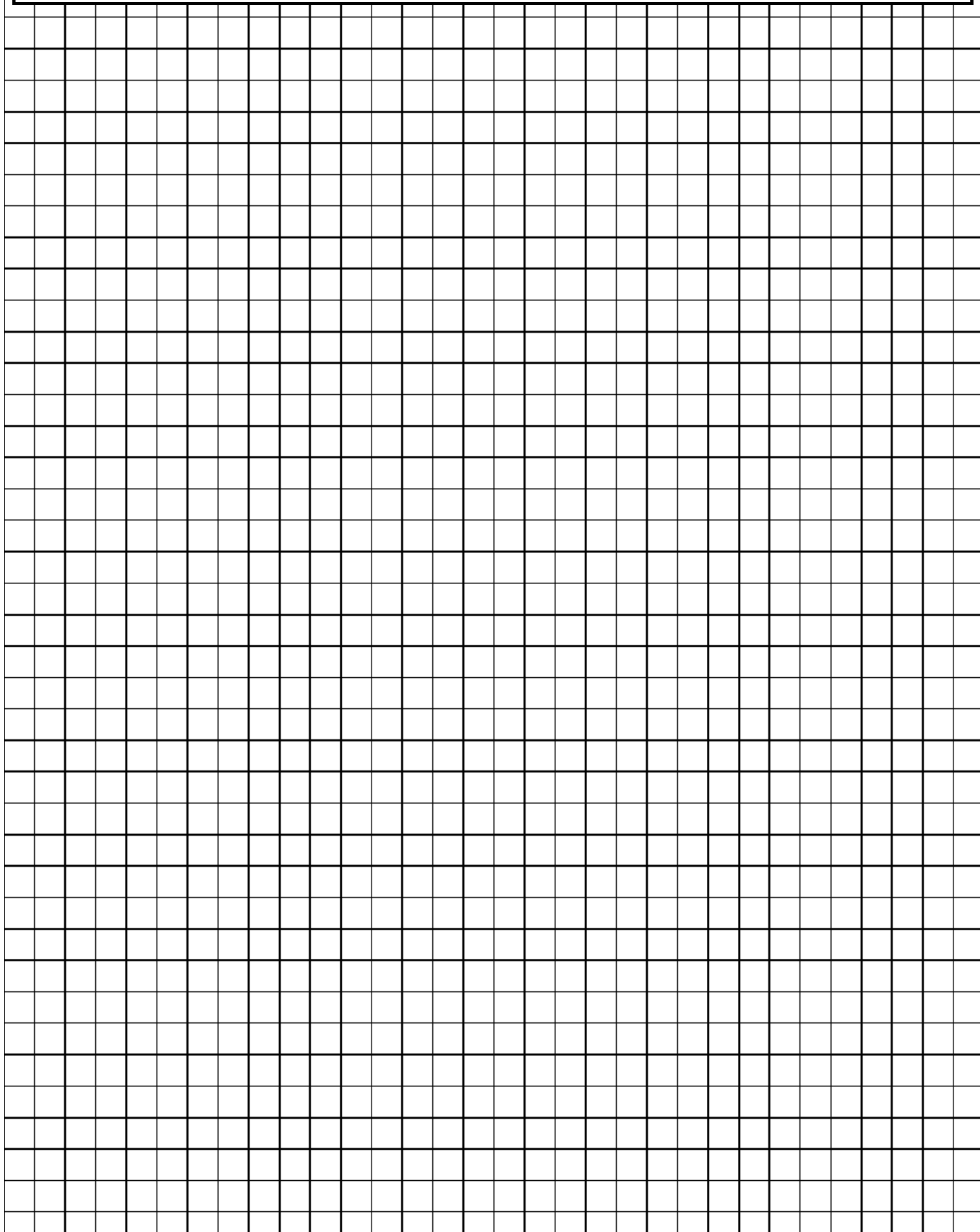
Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.



№ 13.

а) Решите уравнение: $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.



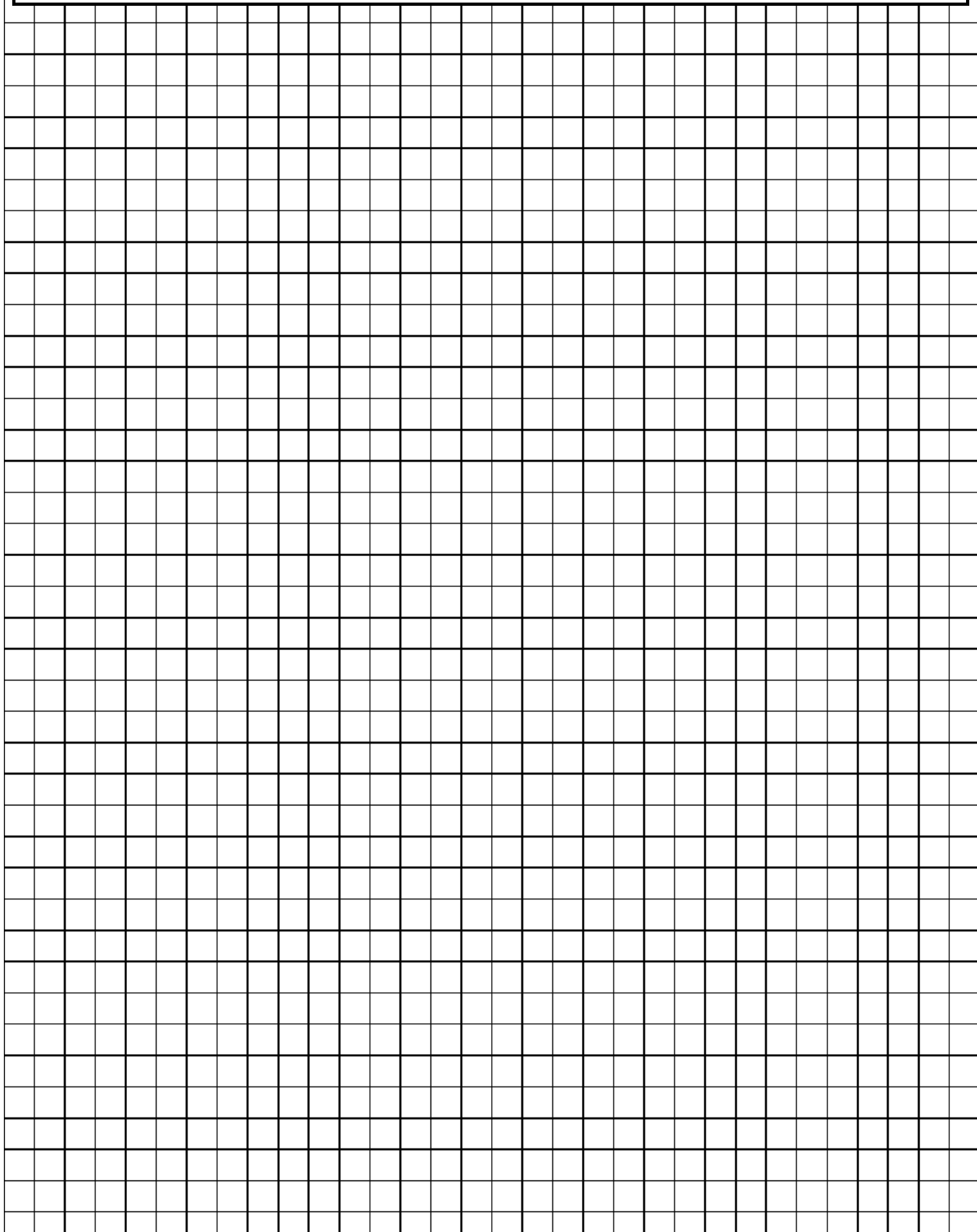
№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребра $DD_1 = 24$, $AD = 8$ и $AB = 7,5$. На ребрах AA_1 и CD отмечены точки P и K соответственно, причем $DK = 5$, $A_1 P = 6$. Плоскость BKP пересекает ребро DD_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра DD_1 .
- б) Найдите расстояние от точки D до плоскости BKP .

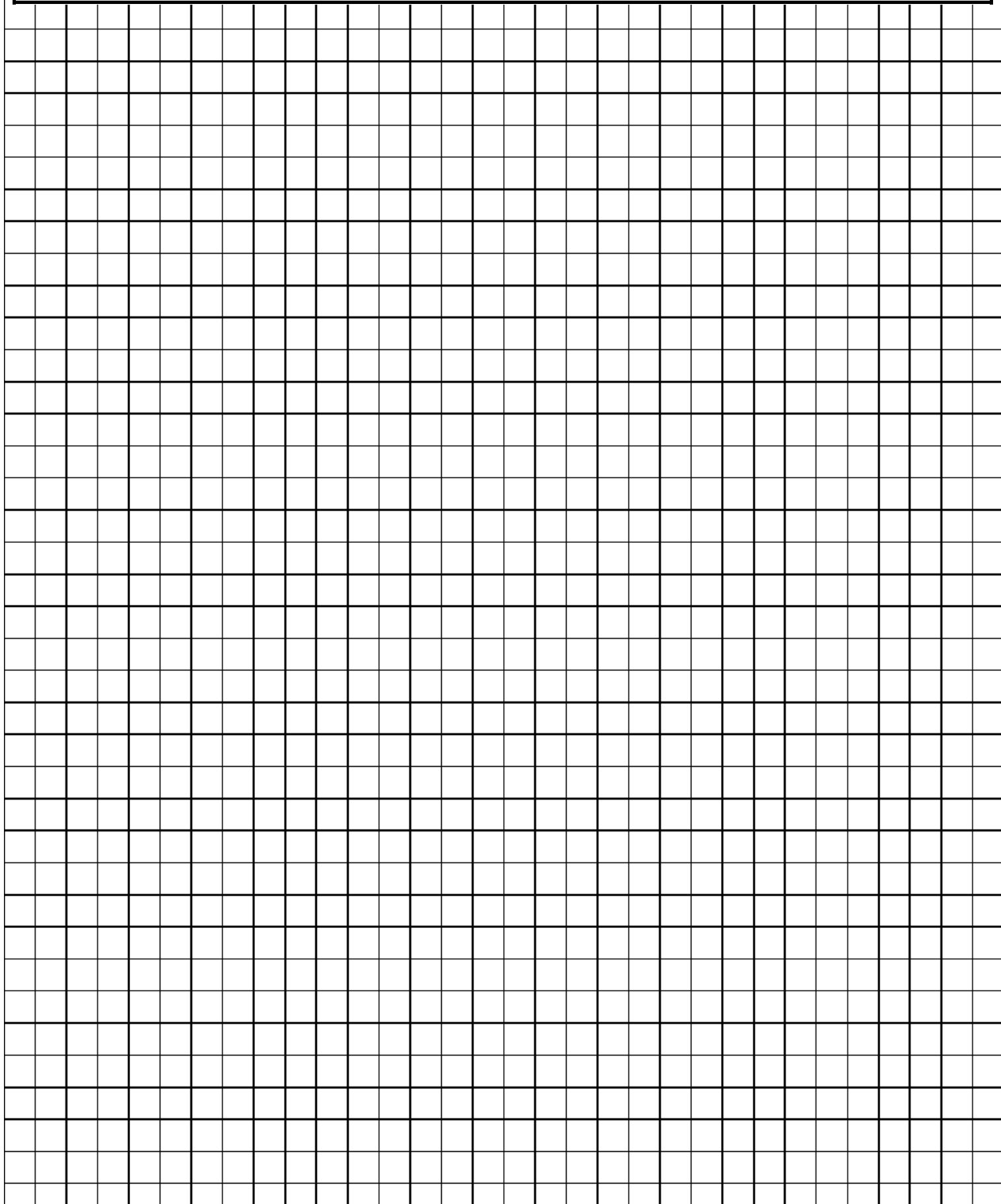
№ 15.

Решите неравенство $\log_{9x} 27 \leq \frac{1}{\log_3 x}$.



№ 16.

Петр Иванович получил кредит в банке под определенный процент годовых. Ровно через год (после начисления процентов) Петр Иванович в счет погашения кредита вернул $\frac{2}{13}$ той суммы, которую задолжал к тому моменту. А еще через год он внес сумму, на 43% превышающую величину займа, и тем самым полностью погасил кредит. Каков был процент годовых?



№ 17.

Через точку C на окружности с центром O проведена касательная, пересекающая продолжение диаметра AD за точку D в точке S . Прямая, проходящая через середину хорды CD и точку S пересекает окружность в точках B и G ($GB < BS$), а отрезки AC , CO и CD — в точках T , E и F соответственно. Прямая BD пересекает отрезки AC и CO точках K и P соответственно, причем BC параллельна AD .

а) Докажите, что $EK : AD = 1 : 6$.

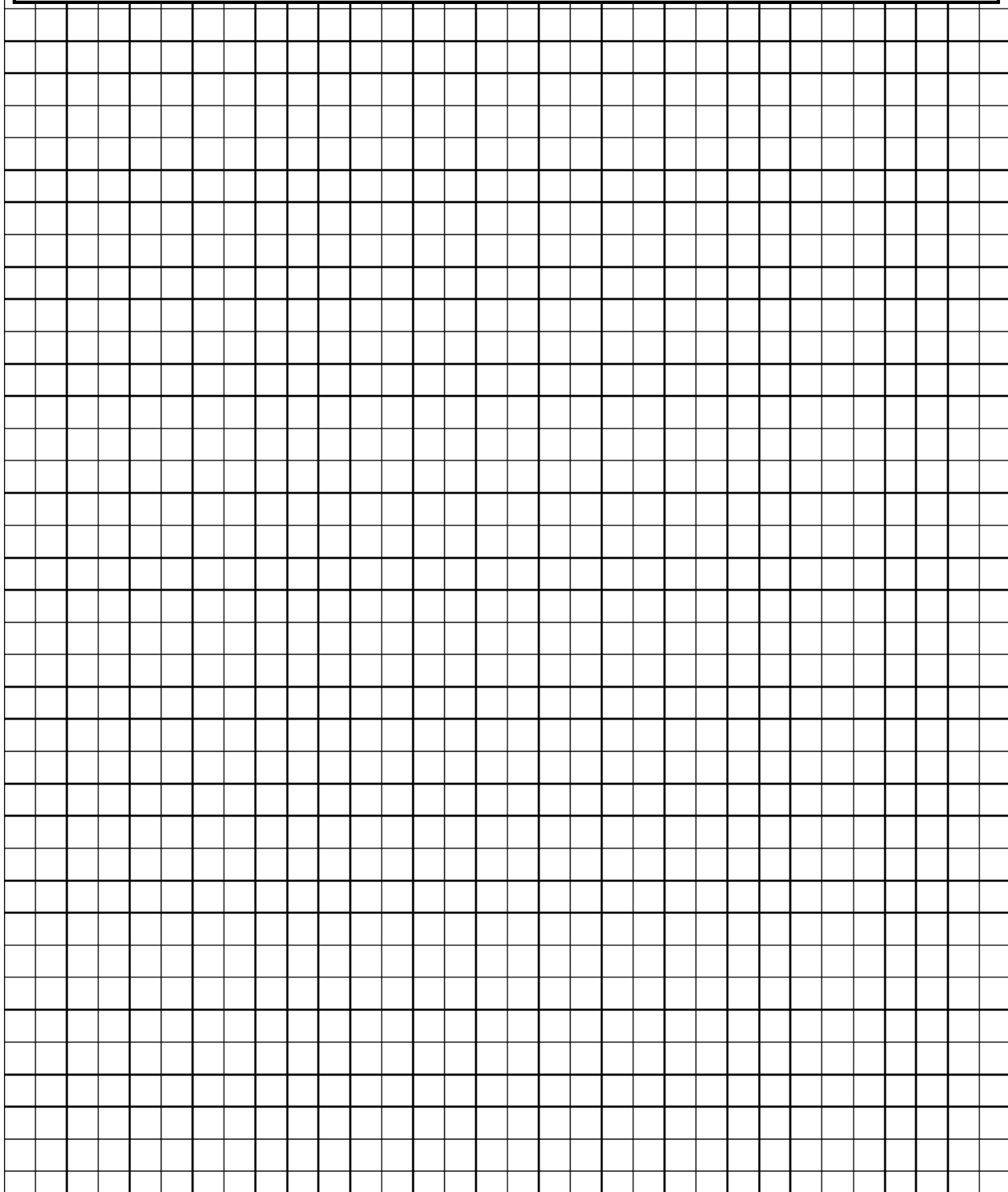
б) Найдите площадь четырехугольника $KTEP$, если радиус окружности равен 4.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$2 + \sqrt{x^2 + ax} > x$$

содержит отрезок $[4; 7]$.



No 19.

Тридцать пять шариков массой 1 г, 2 г, ..., 35 г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Масса каждого шарика выражается целым числом граммов. Затем из второй коробки переложили в первую один шарик. После этого средняя масса шариков в первой коробке увеличилась на 4 г.

- а) Могло ли такое быть, если первоначально в первой коробке лежали только шарики массой 3 г, 12 г и 27 г?
б) Могла ли средняя масса шариков в первой коробке первоначально равняться 12,6 г?
в) Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27821	5
2	649918	6
3	27102	2
4	680564	0,41
5	628364	0,9951
6	689090	-94
7	26767	-5
8	523369	4
9	27990	0,125
10	99609	600
11	509253	7
12	503145	-5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде $x+1=3\sqrt{x-1}$. При $x+1 < 0$ уравнение не имеет корней. При $x+1 \geq 0$ уравнение принимает вид:

$$x^2 + 2x + 1 = 9x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 5. \end{cases}$$

Оба корня удовлетворяют условию $x+1 \geq 0$.

б) Заметим, что $\sqrt{3} < 2$, $\sqrt{20} < 5$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) 2; 5; б) 2.

Примечание.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Приведём другое решение пункта а):

Дано уравнение $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$. Пусть $\sqrt{x-1} = t$, тогда $x - 1 = t^2 \Leftrightarrow x = t^2 + 1$. Получаем

$$t^2 + 1 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 2. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 1, \\ x-1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 5. \end{cases}$$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Соединим точку B с точками P и K , через точку K проведем прямую, параллельную прямой BP . Она лежит в плоскости сечения, так как параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым. Пусть M — точка пересечения этой прямой с ребром DD_1 , $BKMP$ — сечение. Прямые KM и BP , а также прямые AB и CD — параллельны, следовательно, $\angle MKD = \angle PBA$. Таким образом, прямоугольные треугольники MKD и PBA подобны. Тогда $AP = AA_1 - A_1P = 18$ и $\frac{MD}{PA} = \frac{KD}{AB}$, откуда

$$MD = \frac{KD \cdot PA}{AB} = 12 = \frac{1}{2}DD_1.$$

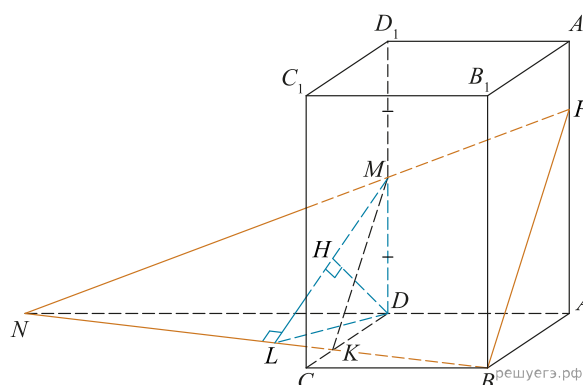
Следовательно, точка M — середина DD_1 .

б) Пусть N — точка пересечения плоскости BKP с прямой AD (также через нее проходят прямые PM и BK). Из точки D опустим перпендикуляр DL на прямую BK . По теореме о трех перпендикулярах прямая ML перпендикулярна прямой BK . Таким образом, плоскость MDL перпендикулярна прямой BK .

В плоскости MDL из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую ML . Тогда отрезок DH перпендикулярен плоскости BKP и его длина является расстоянием до этой плоскости от точки D . Треугольники NDK и NAB подобны, следовательно,

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DK}{AB} \Leftrightarrow ND = \frac{(ND + AD)DK}{AB} \Leftrightarrow ND = \frac{AD \cdot DK}{AB - DK} = 16.$$

Далее находим:



$$NK = \sqrt{ND + DK} = \sqrt{281},$$

$$DL = \frac{ND \cdot DK}{NK} = \frac{80}{\sqrt{281}},$$

$$MD = \frac{1}{2}DD_1 = 12,$$

откуда

$$ML = \sqrt{DL^2 + MD^2} = \frac{4\sqrt{2929}}{\sqrt{281}},$$

$$\text{а значит, } DH = \frac{DL \cdot MD}{ML} = \frac{240}{\sqrt{2929}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{240}{\sqrt{2929}}.$$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x \neq 1, \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{9}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

В логарифмах перейдем к основанию 3. Будем иметь: $\frac{3}{\log_3 x + 2} \leq \frac{1}{\log_3 x}$. Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$\frac{3}{t+2} - \frac{1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t - t - 2}{t(t+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t-2}{t(t+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t(t+2)} \leq 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак рационального выражения	–	+	–	+

Итак, будем иметь: $\begin{cases} t < -2, \\ 0 < t \leq 1. \end{cases}$ Теперь перейдем к переменной x .

$$\log_3 x < -2 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{9};$$

$$0 < \log_3 x \leq 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 3 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть S — сумма кредита, взятая под $r\%$ годовых, а $k = 1 + \frac{r}{100}$. Запишем в таблицу, как менялся долг Петра Ивановича.

Первоначальная сумма долга	S
Сумма долга после первого начисления процентов	kS
Сумма долга после первой выплаты	$kS - \frac{2}{13}kS = \frac{11}{13}kS$
Сумма долга после второго начисления процентов	$\frac{11}{13}k^2S$
Сумма долга после второй выплаты	$\frac{11}{13}k^2S - 1,43S = 0$

Решим полученное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{11}{13}k^2S - 1,43S = 0 &\Leftrightarrow \frac{11}{13}k^2 = 1,43 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1,43 \cdot 13}{11} \Leftrightarrow k^2 = 1,69 \Leftrightarrow k = 1,3, \quad \frac{11}{13}k^2S - 1,43S = 0 \Leftrightarrow \frac{11}{13}k^2 = 1,43 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{1,43 \cdot 13}{11} \Leftrightarrow k^2 = 1,69 \Leftrightarrow k = 1,3. \end{aligned}$$

Откуда

$$1 + \frac{r}{100} = 1,3 \Leftrightarrow r = 30.$$

Ответ: кредит был взят под 30% годовых.

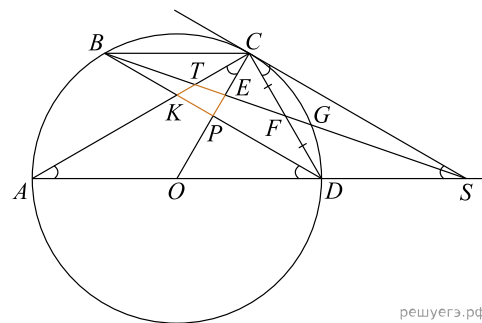
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Четырёхугольник $ABCD$ — вписанная трапеция, следовательно, она равнобедренная и её диагонали равны. Треугольники BCF и SDF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $DS = BC$ и четырёхугольник $BCSD$ — параллелограмм. Отрезки CS , BD и AC равны, поэтому треугольник ACS — равнобедренный. Угол CAD равен углу CSD , а угол SCD — углу CAD по теореме об угле между хордой и касательной. Равнобедренные треугольники AOC и SDC равны по стороне и двум углам. Значит,

$$AO = OC = OD = CD = SD = BC.$$



решуегэ.рф

Получаем, что треугольники BEC и SEO подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$ и треугольники BKC и AKD подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Следовательно, треугольники SKE и CAO подобны, $\frac{KE}{AO} = \frac{1}{3}$. Таким образом, $\frac{EK}{AD} = \frac{EK}{2AO} = \frac{1}{6}$.

б) Треугольник OCD — равносторонний. Последовательно получаем:

$$\angle OCD = 60^\circ,$$

$$\angle ACO = 30^\circ = \angle DBC = \angle ACB,$$

$$\angle BPC = 90^\circ.$$

Из доказанного ранее

$$\frac{CE}{CP} = \frac{BK}{BP} = \frac{2CE}{CO} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$\frac{KT}{TC} = \frac{ET}{BT} = \frac{KE}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$S_{BEC} = \frac{2}{3} S_{BPC},$$

$$S_{BKT} = \frac{1}{4} S_{BKC} = \frac{1}{6} S_{BPC},$$

$$S_{KTEP} = \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) S_{BPC} = \frac{1}{6} S_{BPC}.$$

Найдем площадь треугольника BPC :

$$S_{BPC} = \frac{1}{2} BP \cdot PC = \frac{1}{2} BC \cdot \sin 30^\circ \cdot BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Искомая площадь равна } S_{KTEP} = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3

С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Преобразуем неравенство:

$$2 + \sqrt{x^2 + ax} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + ax} > x - 2 \Leftrightarrow_{4 \leq x \leq 7} x^2 + ax > x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax > -4x + 4 \Leftrightarrow_{4 \leq x \leq 7} a > -4 + \frac{4}{x}$$

На отрезке $[4; 7]$ функция $a(x) = -4 + \frac{4}{x}$ убывает. Значит, чтобы отрезок $[4; 7]$ являлся решением неравенства $a > -4 + \frac{4}{x}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a > a(4) = -4 + \frac{4}{4} = -3$.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Если раньше были только шарики 3, 12 и 27 граммов, то средняя их масса составляла $\frac{1}{3}(3 + 12 + 27) = 14$ граммов. После перекалывания средняя масса составила 18 граммов, то есть суммарная стала равна $18 \cdot 4 = 72$ грамма. До перекалывания она была 42 грамма. Значит, нужно добавить шарик массой 30 граммов.

б) Пусть в коробке было x шариков, тогда их суммарная масса была $12,6x$, то есть $\frac{63x}{5}$. Поскольку масса целая, число x должно делиться на 5. Однако после добавления еще одного шарика масса должна получиться $16,6(x+1) = \frac{83(x+1)}{5}$, откуда $x+1$ тоже должно делиться на 5. Но два последовательных числа не могут одновременно делиться на 5.

в) Пусть в коробке было x шариков средней массой n . Тогда суммарная масса была равна xn , а стала $(x+1)(n+4)$. Значит, был добавлен шарик массой

$$(x+1)(n+4) - xn = n + 4x + 4 \leq 35,$$

откуда $n + 4x \leq 31$ и $x < \frac{31}{4}$, поэтому $x \leq 7$.

Если бы шариков было 7, то их средняя масса была бы не меньше $\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$, поэтому $n + 4x = 4 + 4 \cdot 7 = 32 > 31$, что невозможно. Для шести шариков есть пример: если были шарики массой 1, 2, 3, 4, 5, 9,

то их средняя масса была равна 4, при этом если добавить шарик массой 32, средняя масса станет равна 8.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.
