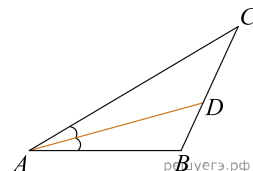


Вариант 81

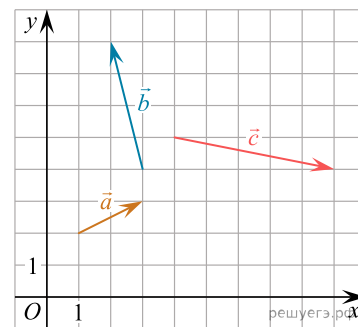
№ 1.

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 30° , угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



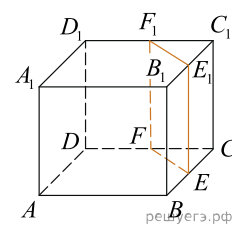
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение выражения $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



№ 3.

Ребро куба равно 6. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.



№ 4.

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

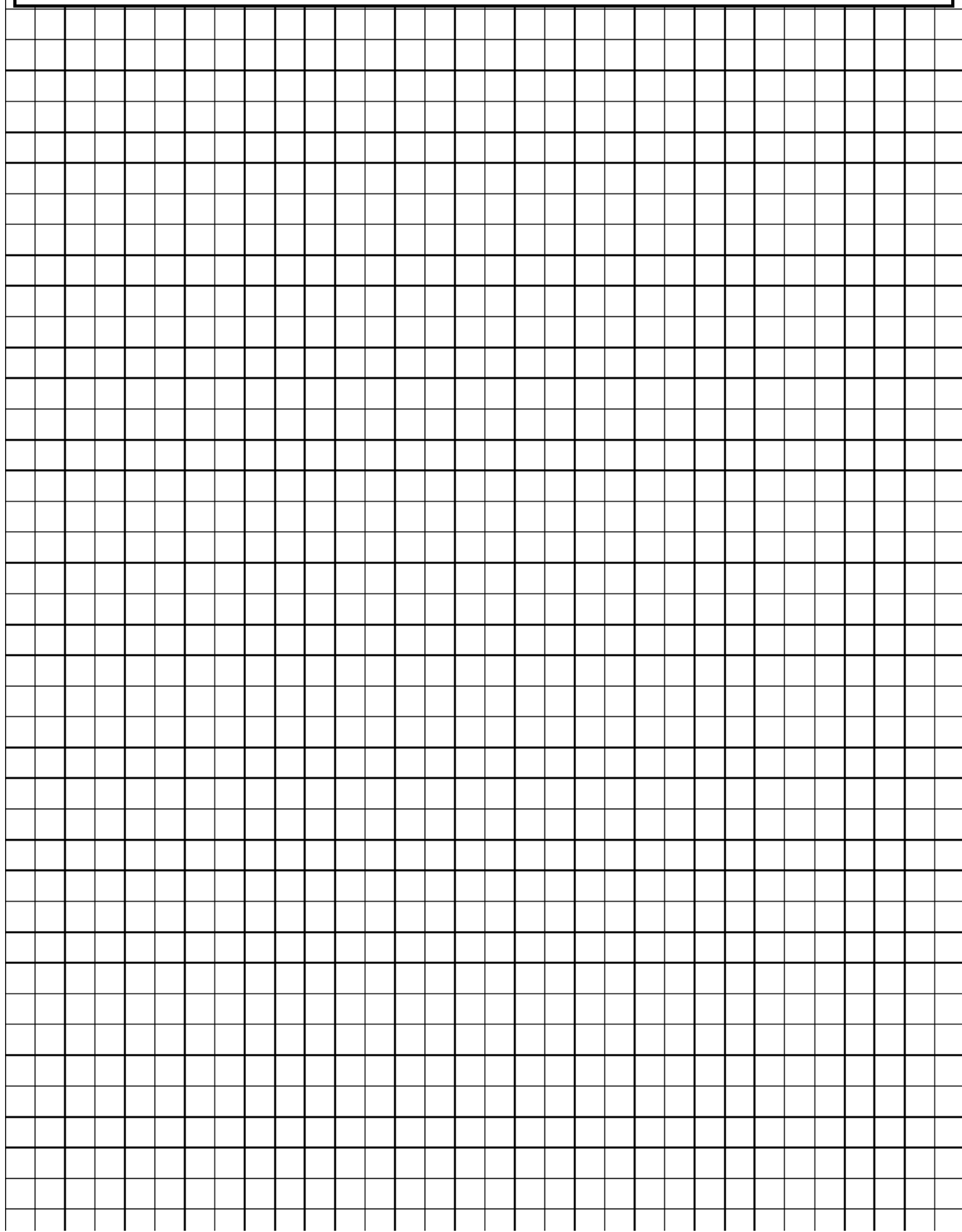
№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

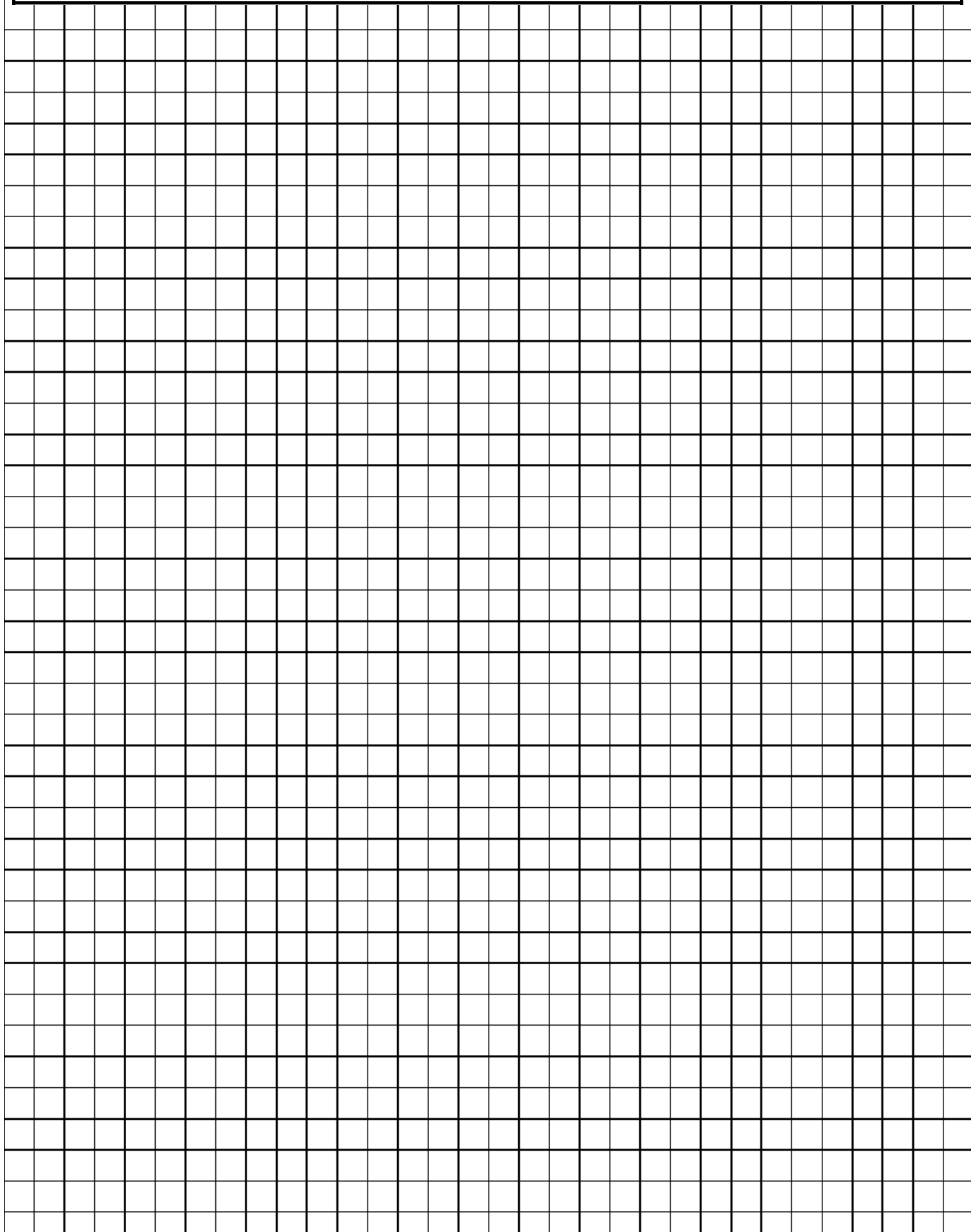
№ 6.

Найдите корень уравнения: $9^{-5+x} = 729$.



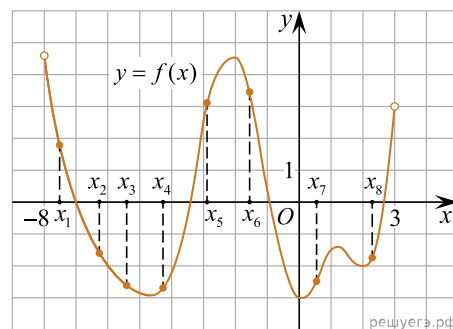
№ 7.

Найдите значение выражения $b^{\frac{1}{3}} \cdot (b^{\frac{9}{10}})^2$ при $b = 7$.



№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Сколько из отмеченных точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ принадлежат промежуткам убывания функции?



No 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

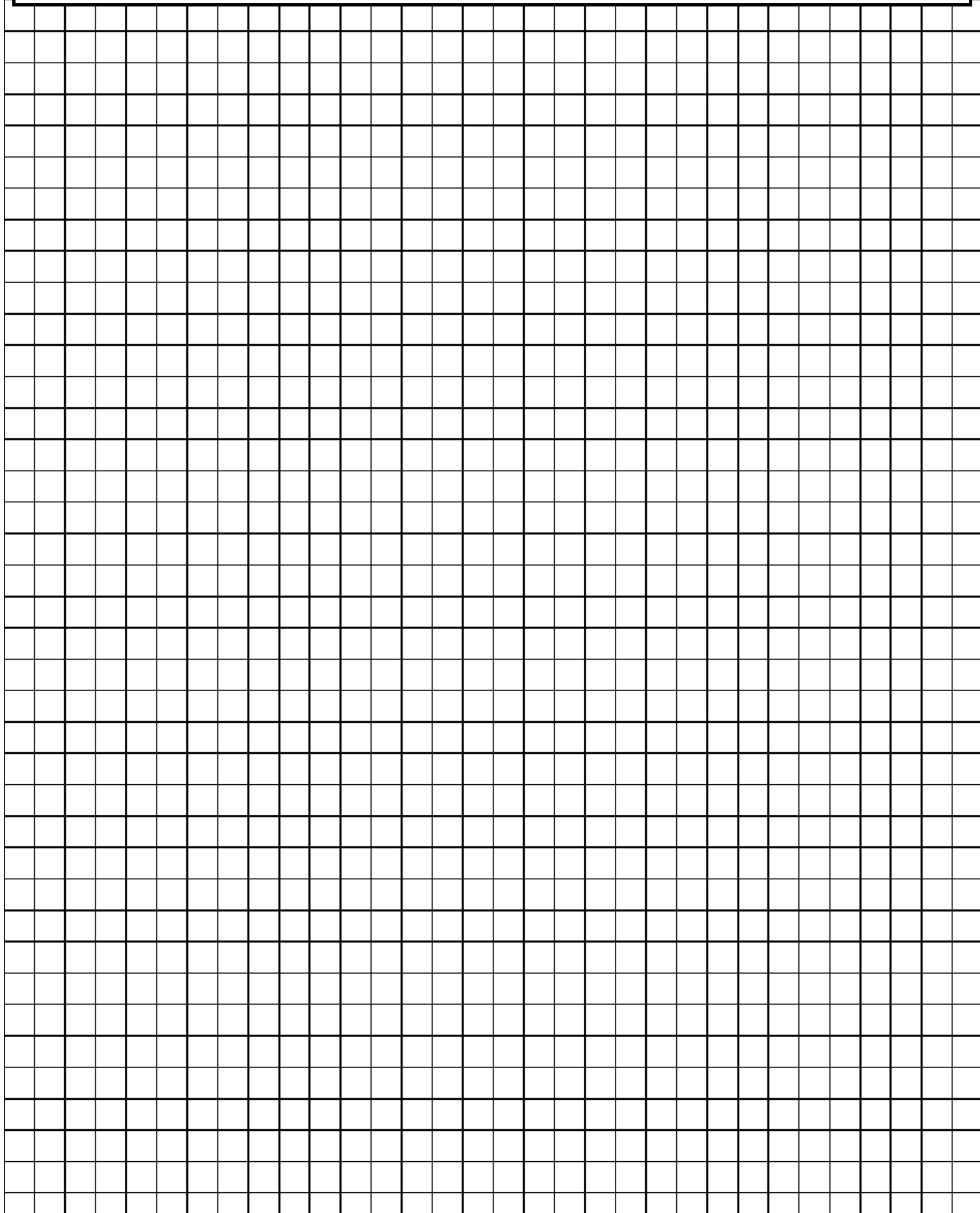
$$R = r_{\text{ПОК}} - \frac{r_{\text{ПОК}} - r_{\text{ЭКС}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{ПОК}} + 0,1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

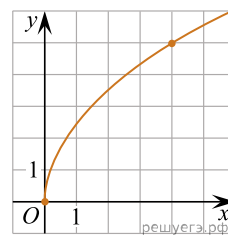
№ 10.

После смешения двух растворов, первый из которых содержал 150г кислоты, а второй содержал 60г такой же кислоты, получили 400г нового раствора. Найдите концентрацию первого раствора (в процентах), если известно, что она на 20 больше концентрации второго (в процентах).



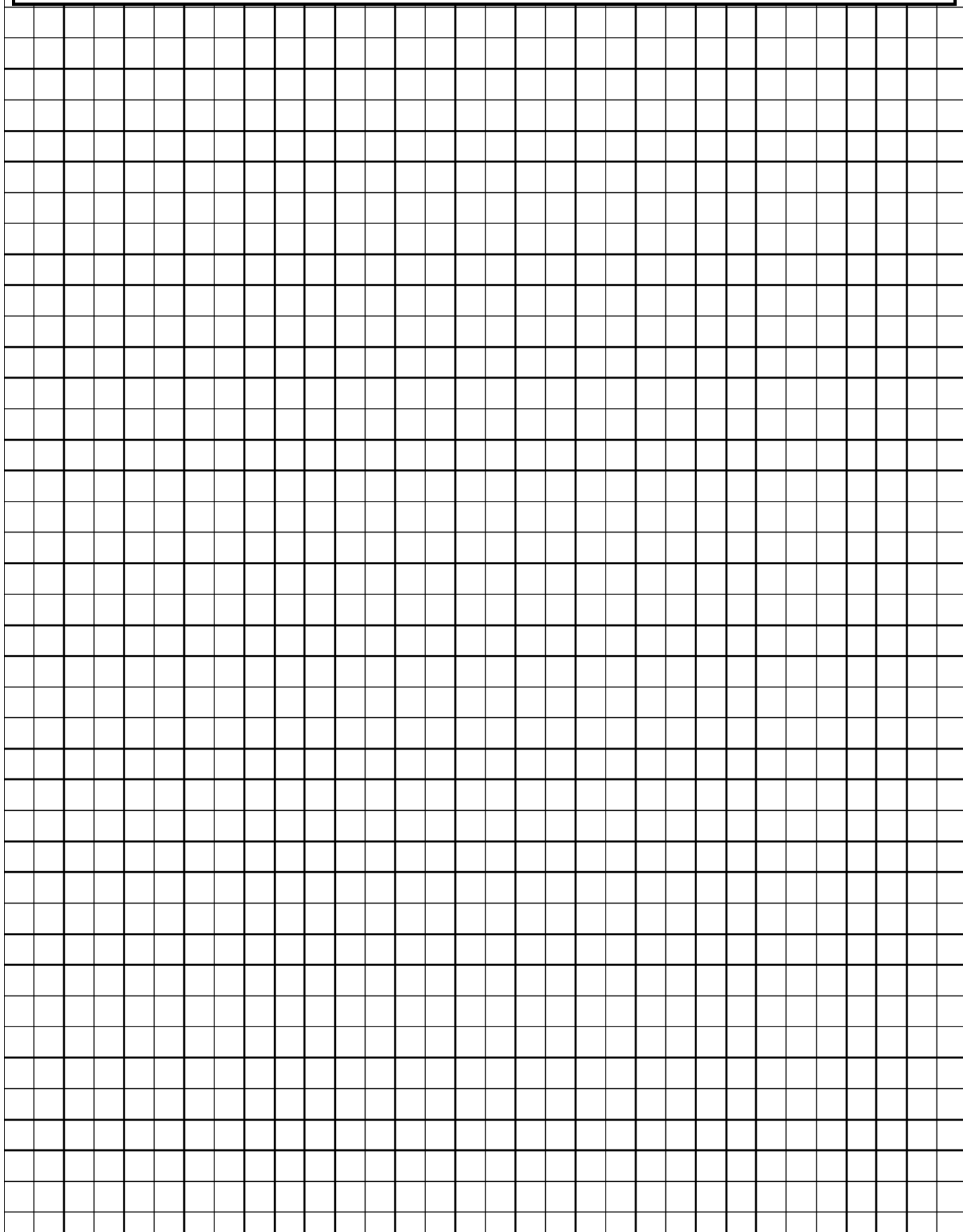
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3,5$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x\sqrt{x}$.



№ 13.

а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x(\operatorname{ctg} x - \cos x) = 2 \sin^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

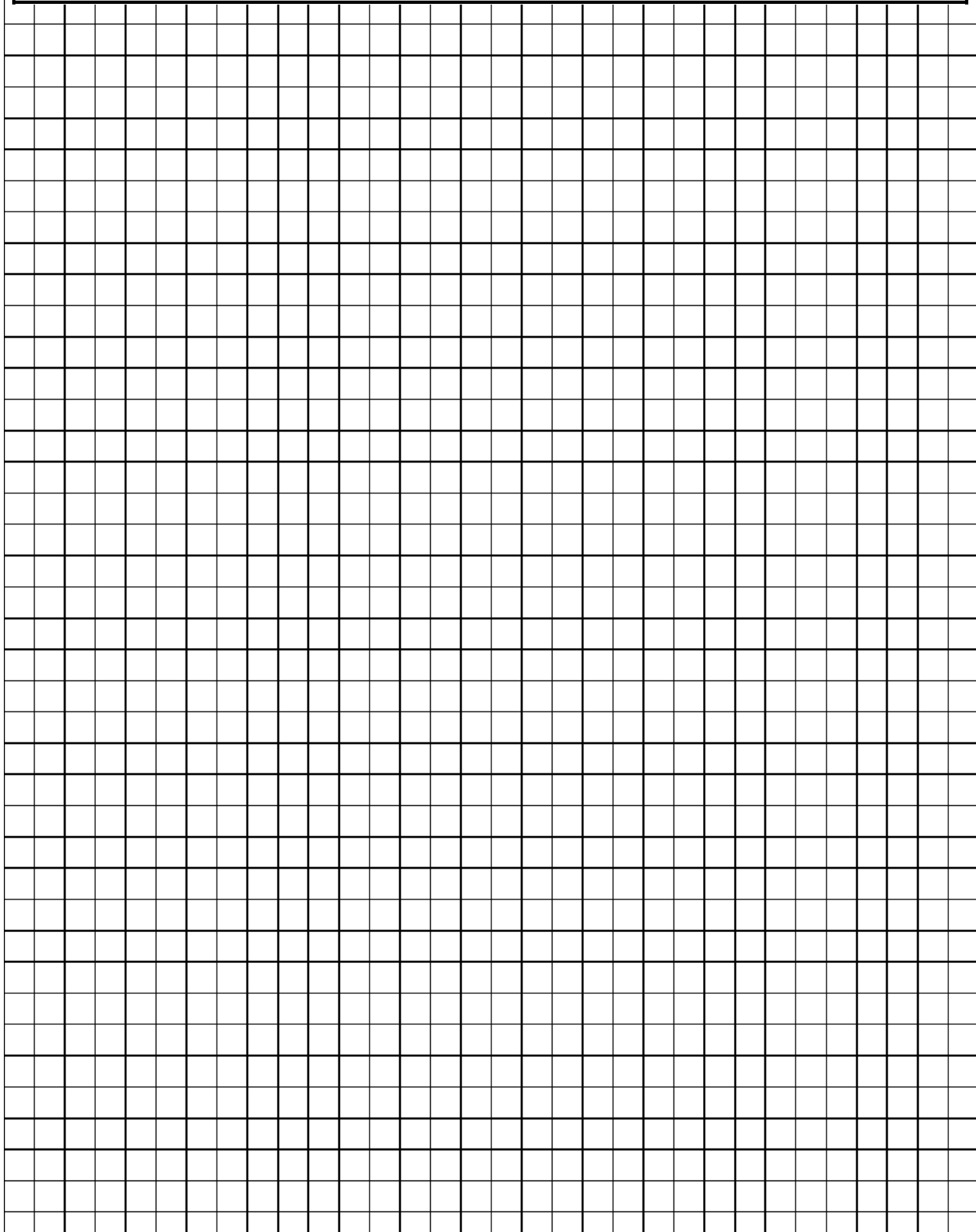
Все ребра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 16. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SB и проходящая через точку O , пересекает рёбра SA и SD в точках K и L соответственно. Точка K делит ребро SA в отношении $SK : KA = 3 : 5$.

а) Докажите, что точка L — середина ребра SD .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OKL пересекает грань SCD .

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{x-1}(-x^2 + 8x - 7) - \frac{1}{16} \log_{x-1}^2(x-7)^2 \geq 2$.



№ 16.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

[illegible]

№ 17.

В трапеции с основаниями $BC=6$ и $AD=8$ на диагонали AC отмечена точка O такая, что $CO : OA=2:3$. Прямая BO пересекает отрезок CD точке E .

а) Докажите, что $CE : DE = 6 : 1$.

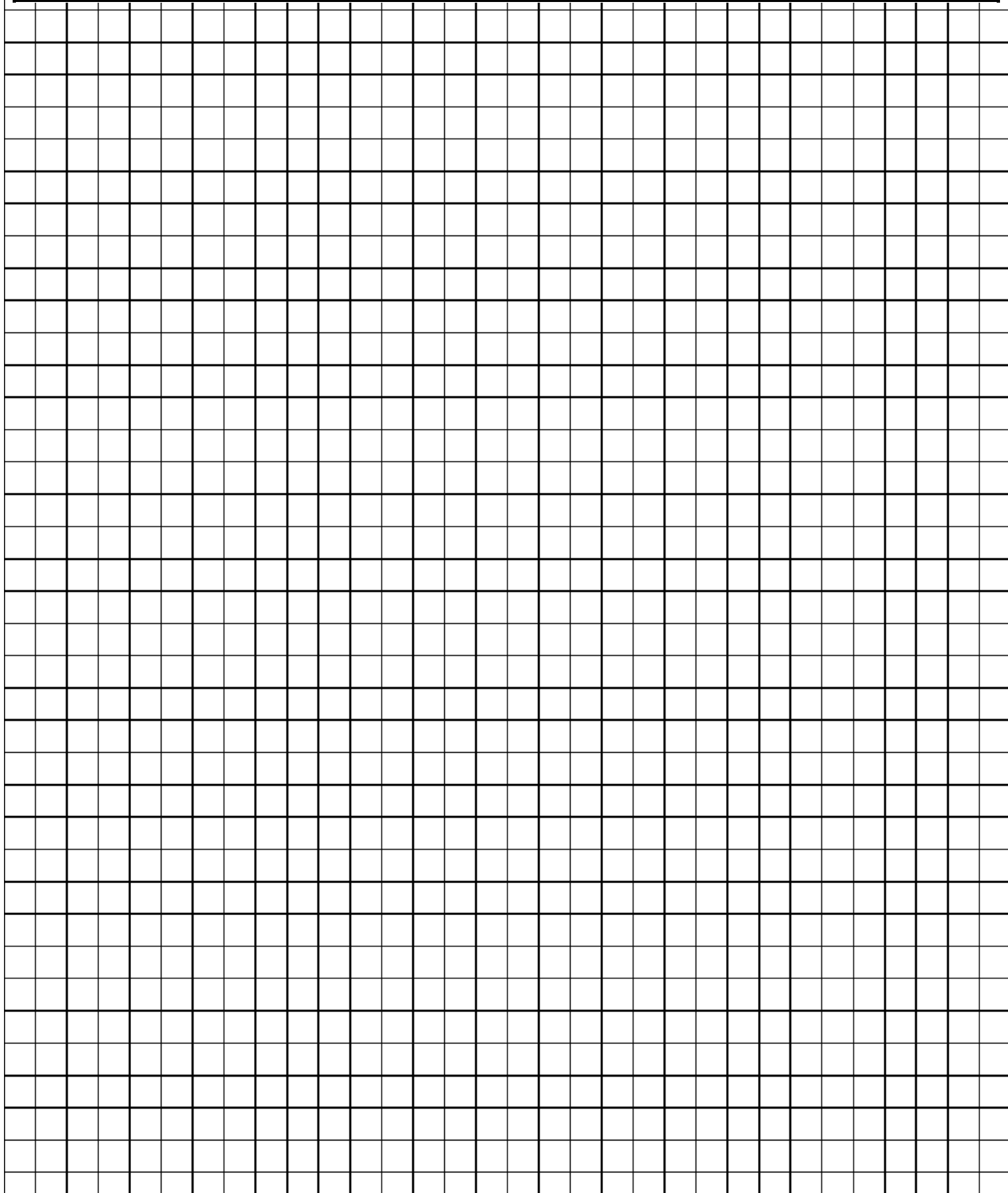
б) Найдите отношение площади треугольника COE к площади трапеции $ABCD$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее значение.



№ 19.

Делитель d натурального числа n будем называть специальным, если числа d и $f = \frac{n}{d}$ взаимно простые. Очевидно, что f также является специальным делителем и $d \neq f$ при $n > 1$. При $n=1$ есть единственный делитель $d = 1$. и хотя $f = \frac{n}{d} = 1 = d$, будем считать $d = 1$ специальным делителем, так как d и f взаимно простые числа.

- а) Сколько последовательных натуральных чисел могут иметь только специальные делители?
- б) Для каких чисел n сумма всех специальных делителей нечетная?
- в) Найдите все числа $n \leq 100$, у которых количество всех делителей в 3 раза больше, чем количество специальных делителей.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27759	52
2	649902	18
3	501533	27
4	282858	0,36
5	508891	0,8
6	26666	8
7	77400	49
8	516374	4
9	317098	0,625
10	639947	60
11	509118	1,96
12	77463	4

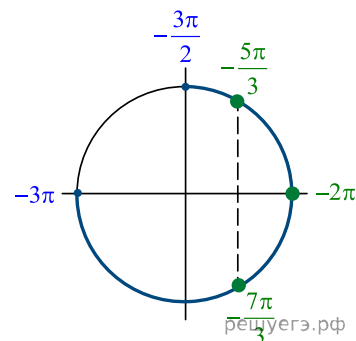
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Обозначим $t = \frac{1}{\cos x}$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 3t + 2 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = 2$. Далее имеем:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

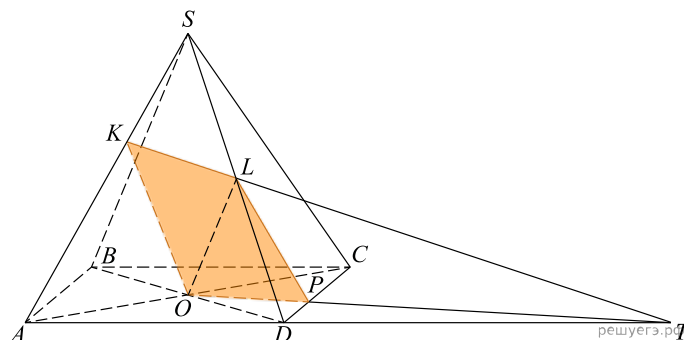
б) Корни отберем с помощью тригонометрической окружности (см.рис.). На отрезке $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ лежат числа $-2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямые OL и SB лежат в одной плоскости, поэтому они либо пересекаются, либо параллельны. Если бы эти прямые пересекались, плоскость α не была бы параллельна ребру SB . Следовательно, прямые OL и SB параллельны, а точка O — середина отрезка BD . Таким образом, точка L — середина ребра SD .



б) Продлим отрезок KL за точку L до пересечения с продолжением ребра AD за точку D в точке T . Точки K, L, T и P лежат в плоскости α , поэтому отрезок PL — искомый. По теореме Менелая для треугольника ASD и прямой KT получаем:

$$\frac{AK}{KS} \cdot \frac{SL}{LD} \cdot \frac{DT}{TA} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{DT}{TA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AT}{DT} = \frac{5}{3}.$$

По теореме Менелая для треугольника ACD и прямой OT находим:

$$\frac{AT}{DT} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{DP}{PC} = \frac{3}{5}.$$

Значит, $DL = 8$, $DP = 6$, треугольник SDC — равносторонний, а потому $\angle LDP = 60^\circ$. По теореме косинусов для треугольника LDP получаем:

$$\begin{aligned} LP &= \sqrt{DL^2 + DP^2 - 2 \cdot DL \cdot DP \cdot \cos \angle LDP} = \\ &= \sqrt{64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100 - 48} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}. \quad LP = \sqrt{DL^2 + DP^2 - 2 \cdot DL \cdot DP \cdot \cos \angle LDP} = \\ &= \sqrt{64 + 36 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{100 - 48} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $2\sqrt{13}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Неравенство определено на множестве $D = (1, 2) \cup (2, 7)$. На области определения имеем:

$$\log_{x-1}(-x^2 + 8x - 7) - \frac{1}{16} \log_{x-1}^2(x-7)^2 \geq 2 \Leftrightarrow_{x \in D} \Leftrightarrow \log_{x-1}(x-1)(7-x) - \frac{1}{4} \log_{x-1}^2(7-x) \geq 2 \Leftrightarrow_{x \in D} \log_{x-1}(7-x) - \frac{1}{4} \log_{x-1}^2(7-x) \geq 1.$$

Пусть $t = \log_{x-1}(7-x)$, тогда

$$t - \frac{t^2}{4} \geq 1 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Таким образом, на ОДЗ

$$\log_{x-1}(7-x) = 2 \Leftrightarrow_{x \in D} (x-1)^2 = 7-x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow_{x \in D} x = 3.$$

Ответ: {3}.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. По условию, за первые 20 месяцев долг должен равномерно уменьшиться на $300-100=200$ (тыс. руб.), значит, долг перед банком (в тыс. руб.) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$300; 290; 280; \dots 110; 100; 0.$$

Первое число каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. руб.) по состоянию на 1-е число такова:

$$306; 295,8; \dots 112,2; 102.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. руб.) должны быть следующими:

$$\begin{matrix} 16; & 15,8; & \dots & 12,2; & 102. \\ (306-290) & (295,8-280) & & (112,2-100) & (102-0) \end{matrix}$$

Значит, всего следует выплатить

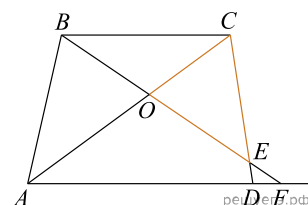
$$\underbrace{(16 + 15,8 + \dots + 12,2)}_{\text{сумма 20-ти членов арифм. прогрессии}} + 102 = \frac{16+12,2}{2} \cdot 20 + 102 = \frac{20 \cdot 28,2}{2} + 102 = 384 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 384 тысячи рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые BO и AD пересекаются в точке F (см.рис.). Пусть также $\frac{CE}{DE} = x$. Тогда из подобия треугольников BEC и FED по двум углам получаем, что $\frac{DF}{CB} = \frac{DE}{CE}$, то есть $DF = \frac{6}{x}$. По теореме Менелая для треугольника ACD и секущей OE находим:



$$\frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{DF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{\frac{6}{x}}{\frac{6}{x} + 8} = 1 \Leftrightarrow 9 = \frac{6}{x} + 8 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 6,$$

откуда и следует требуемое.

б) Пусть высота трапеции равна h , тогда:

$$S_{ABCD} = \frac{6+8}{2} \cdot h = 7h,$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h = 4h.$$

Отношение площадей двух треугольников с равным общим углом равно отношению произведений сторон, которые заключают этот угол в каждом из треугольников, поэтому

$$\frac{S_{COE}}{S_{ACD}} = \frac{CO \cdot CE}{CA \cdot CD} = \frac{2}{2+3} \cdot \frac{6}{6+1} = \frac{12}{35}.$$

Итак,

$$\frac{S_{COE}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{COE}}{S_{ACD}} \cdot \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{12}{35} \cdot \frac{4h}{7h} = \frac{48}{245}.$$

Ответ: б) $\frac{48}{245}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Поскольку $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 x_2 = a^2 - 4a + 12$, получаем:

$$\begin{aligned}
 |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \\
 &= \sqrt{-4a^2 + 16a - 12} = 2\sqrt{-a^2 + 4a - 3} = 2\sqrt{1 - (a - 2)^2}.
 \end{aligned}$$

Полученное выражение, а вместе с ним и исходное, достигает наибольшего значения при $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Приведем другое решение.

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + a^2 - 4a + 4 = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1. \quad x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + a^2 - 4a + 4 = 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1. \quad x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + a^2 - 4a + 4 = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1.
 \end{aligned}$$

На координатной плоскости Oxa это уравнение задает окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 1. Корнями уравнения являются точки пересечения этой окружности с горизонтальной прямой $a = \text{const}$. Наибольшая разность корней достигается в том случае, когда эта прямая содержит диаметр окружности, то есть при $a = 2$.

Приведем решение Тофига Алиева.

Заметим, что для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} = \sqrt{D},$$

поскольку $a = 1$.

Чтобы модуль разности корней уравнения был наибольшим, необходимо и достаточно, чтобы наибольшим было значение выражения $\sqrt{D} = \sqrt{-4a^2 + 16a - 12}$ (здесь a — значение параметра). Квадратичная функция $y = -4a^2 + 16a - 12$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $a_0 = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2$. Проверим, что при найденном значении параметра подкоренное выражение неотрицательно: $y(2) = 4$. Следовательно, наибольшее значение модуля разности достигается при $a = 2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Все делители натурального числа устроены так: нужно разложить число на простые множители, выбрать из них только некоторые и перемножить. Для специальности делителя нужно также, чтобы все копии одного и того же простого множителя либо были взяты, либо наоборот не были взяты.

а) Если хоть одно простое число входит в разложение данного не в первой степени, можно взять одним делителем это простое, а другим — произведение остальных простых, и они не будут специальными. Ясно, что каждое четвертое число кратно 4 и для числа 4 $\times$ делитель 2 специальным не будет. Значит, чисел может быть не более трех. Числа 32, 34, 36 подходят.

б) Если число имеет k различных нечетных простых делителей, то оно имеет 2^k нечетных специальных делителей (поскольку каждый простой делитель может войти или не войти в разложение специального делителя, причем если входит, то в максимально возможной для себя степени. Это число четно кроме случая $k=0$, то есть случая, когда число — степень двойки. Степени двойки имеют специальные делители только себя и единицу и потому подходят, поскольку их сумма нечетна (даже для 2^0 это так).

в) Число вида $p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_x^{k_x}$ имеет 2^x специальных делителей и $(k_1+1) \cdot \dots \cdot (k_x+1)$ всего делителей. Любое число до 100 имеет не более трех различных простых множителей. Разберем случаи.

Если простой множитель всего один, то специальных делителей два, поэтому всех делителей должно быть шесть. Значит, число имеет вид p^5 , поэтому подходит только $p = 2$ ($3^5 > 100$). Итак, 32 это первое такое число.

Если простых множителя два, то специальных делителей 4, а всех делителей 12. Тогда число имеет вид $p^5 q$ или $p^3 q^2$. Первое возможно при $p = 2, q = 3$ (получается 96), а прочие варианты дают числа больше 100, поскольку $3^5 > 100$. Следовательно, $p=2$, при этом даже $2^5 \cdot 5 > 100$, и второе возможно при тех же p и q : $2^3 \cdot 3^2 = 72$, а прочие варианты дают числа больше 100, поскольку $3^3 \cdot 2^2 > 100$ получаем что $p = 2$, при этом даже $2^3 \cdot 5^2 > 100$.

Если простых множителя три, то специальных делителей 8, а всех делителей 24, что невозможно (все делители числа n разбиваются на пары дающих в произведении 1, поэтому в каждой паре есть число, не большее $\sqrt{n} \leq \sqrt{100} = 10$, поэтому и пар не больше 10).

Ответ: а) 3; б) степени двойки; в) 32, 72, 96.