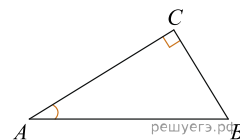


Вариант 82

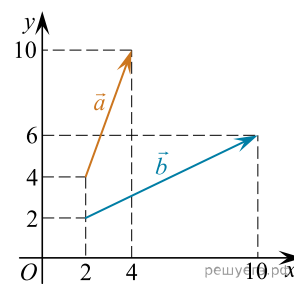
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = 0,5$, $BC = 4$. Найдите AC .



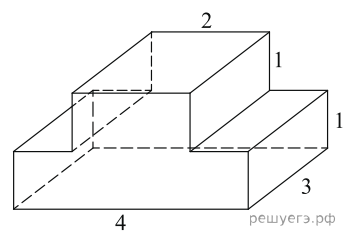
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



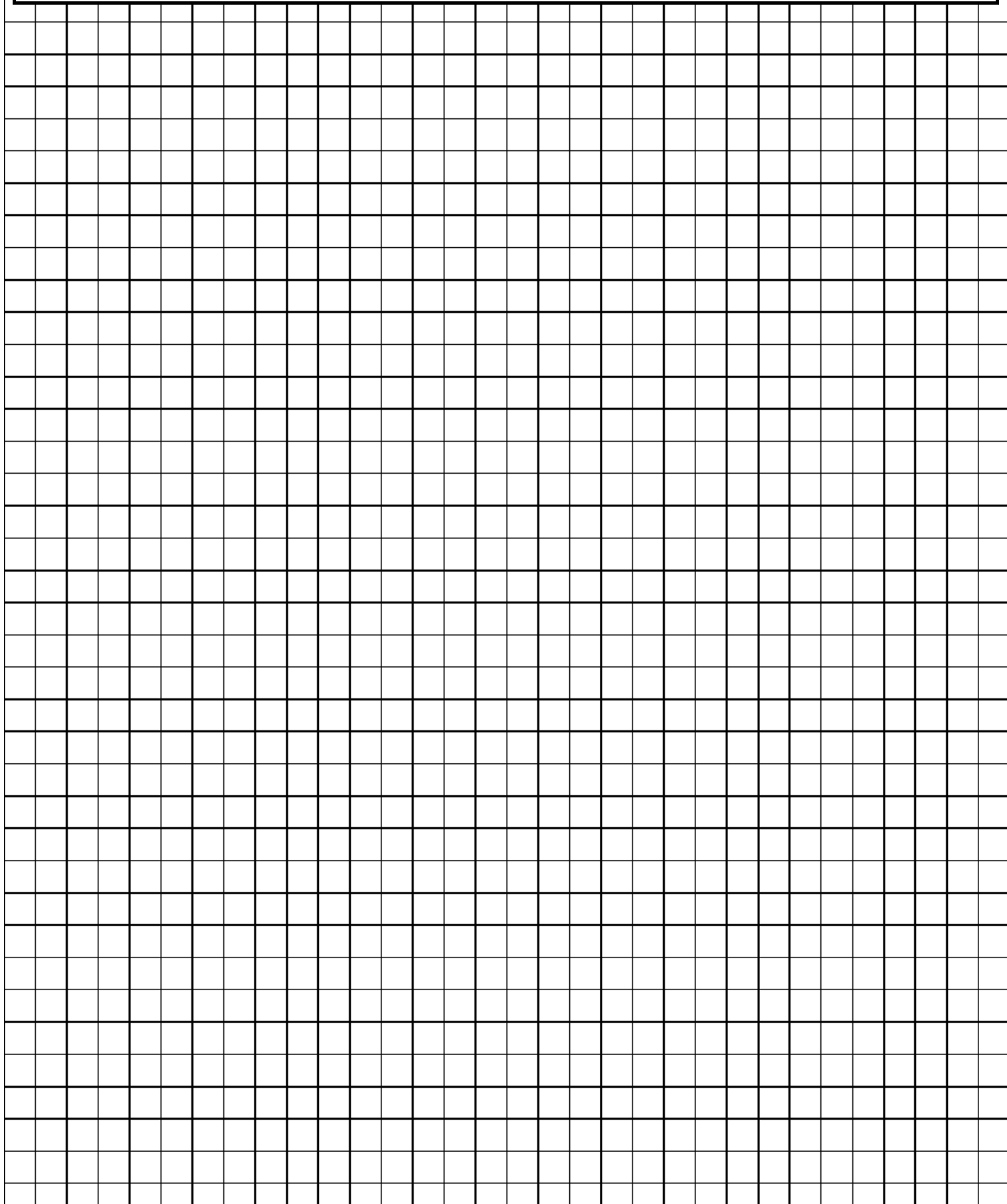
№ 4.

На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18— за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are 20 columns and 20 rows of these squares, creating a total of 400 square units. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or other markings.

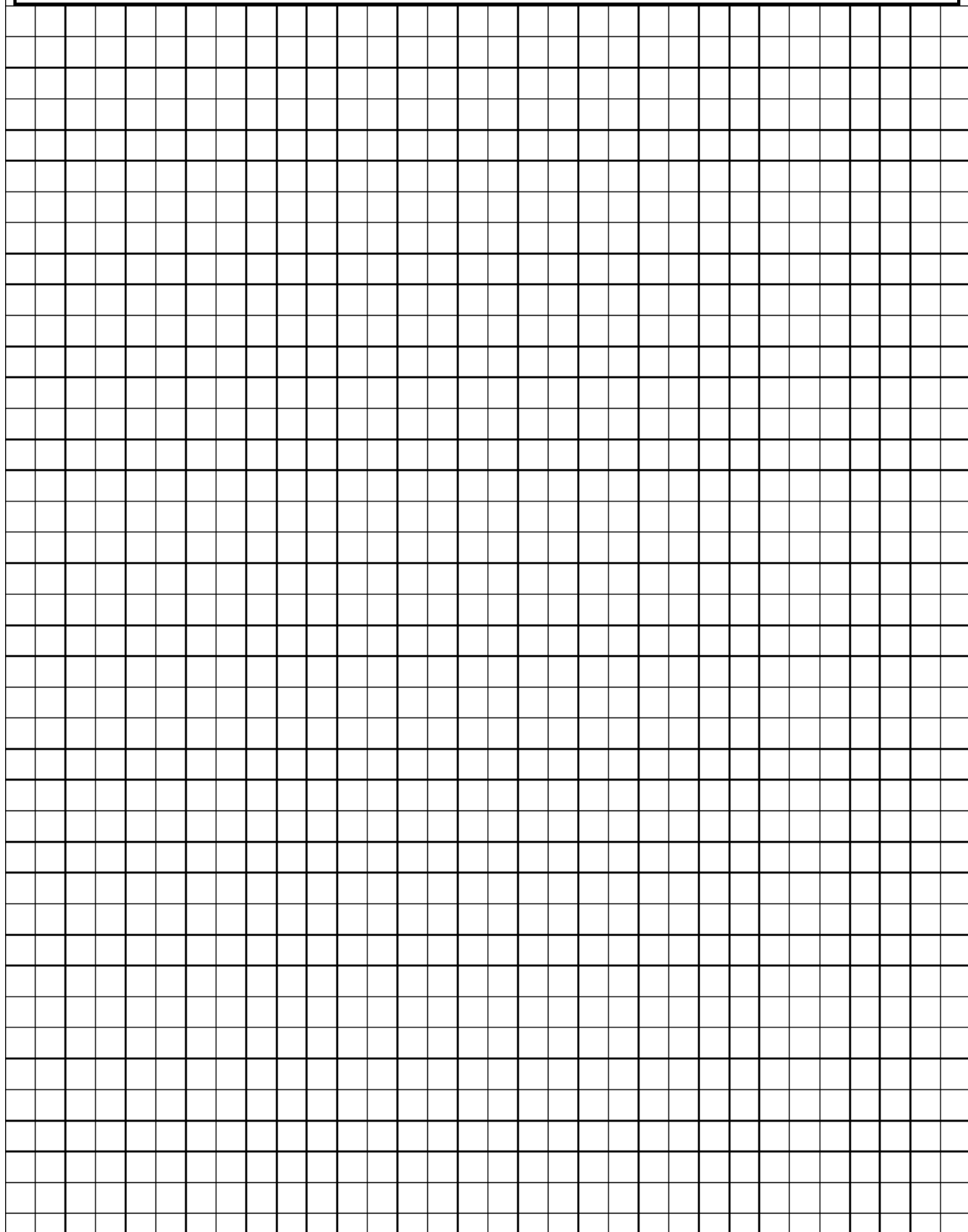
№ 5.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.



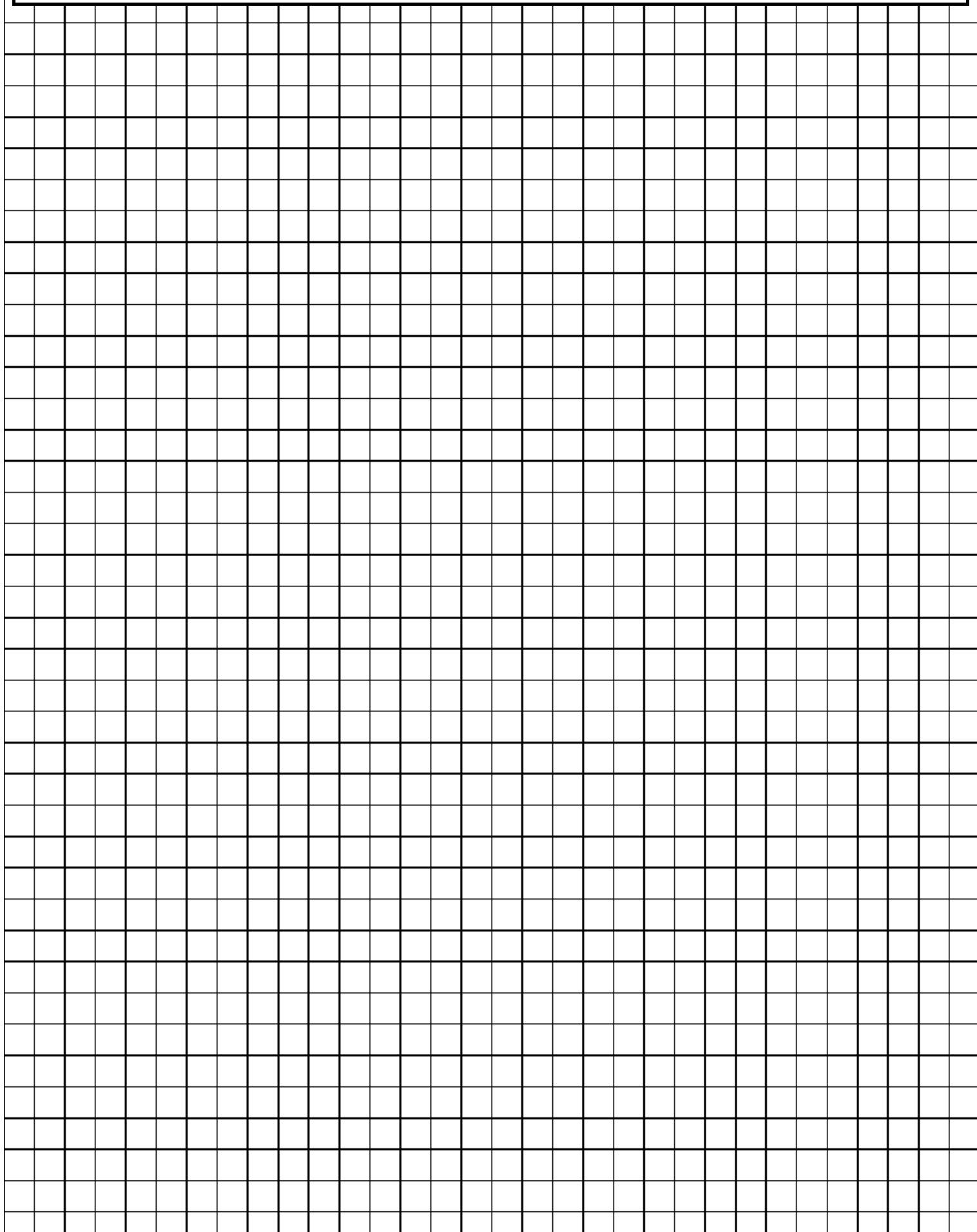
№ 6.

Решите уравнение $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10)$.



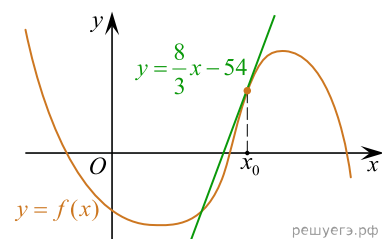
№ 7.

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.



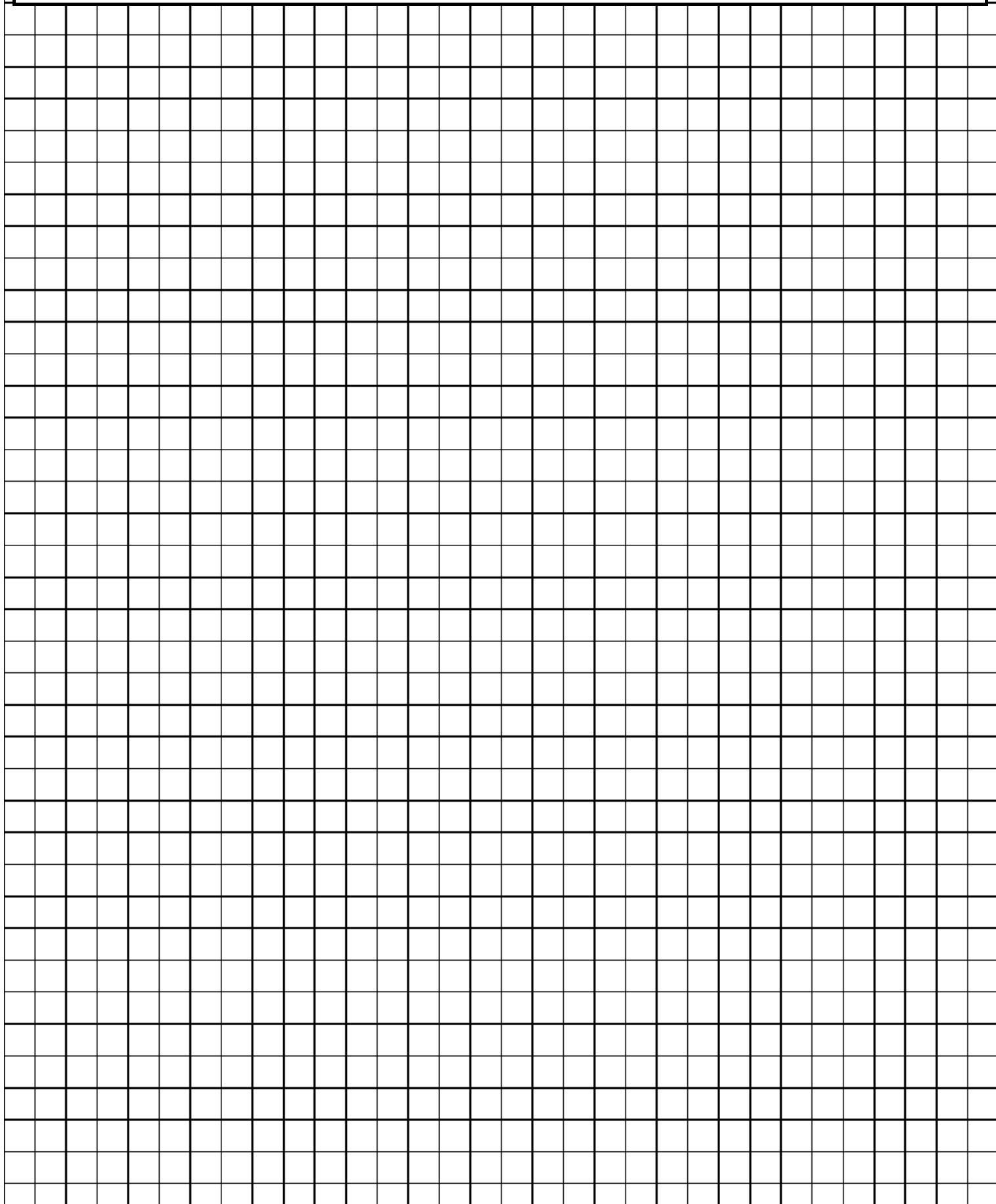
№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = (f'(x) - 0,5) \cdot 6$ в точке x_0 .



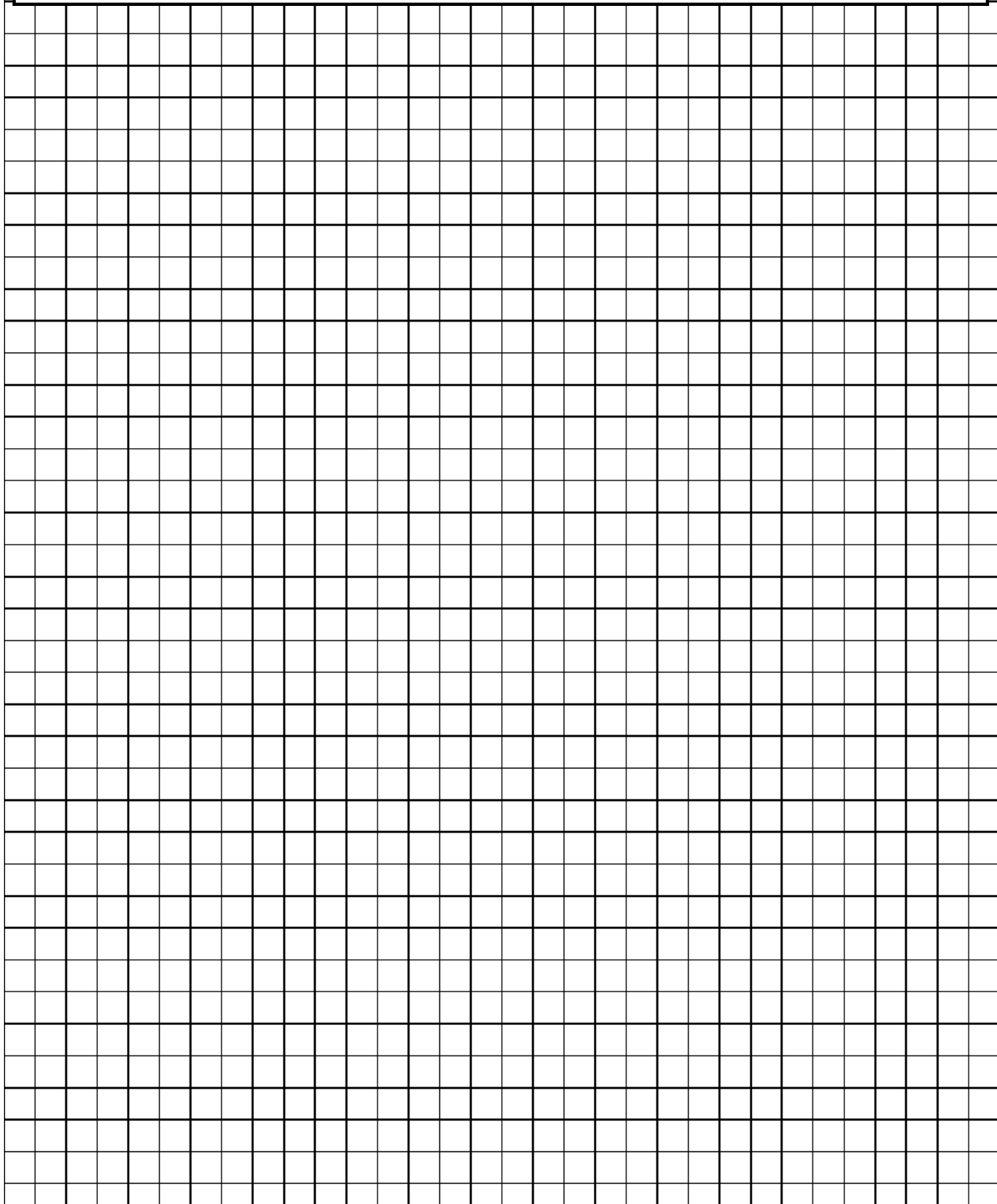
№ 9.

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.



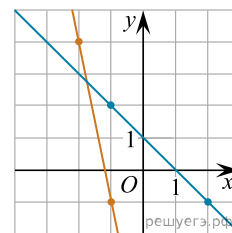
№ 10.

Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними 390 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B . На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость баржи на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.



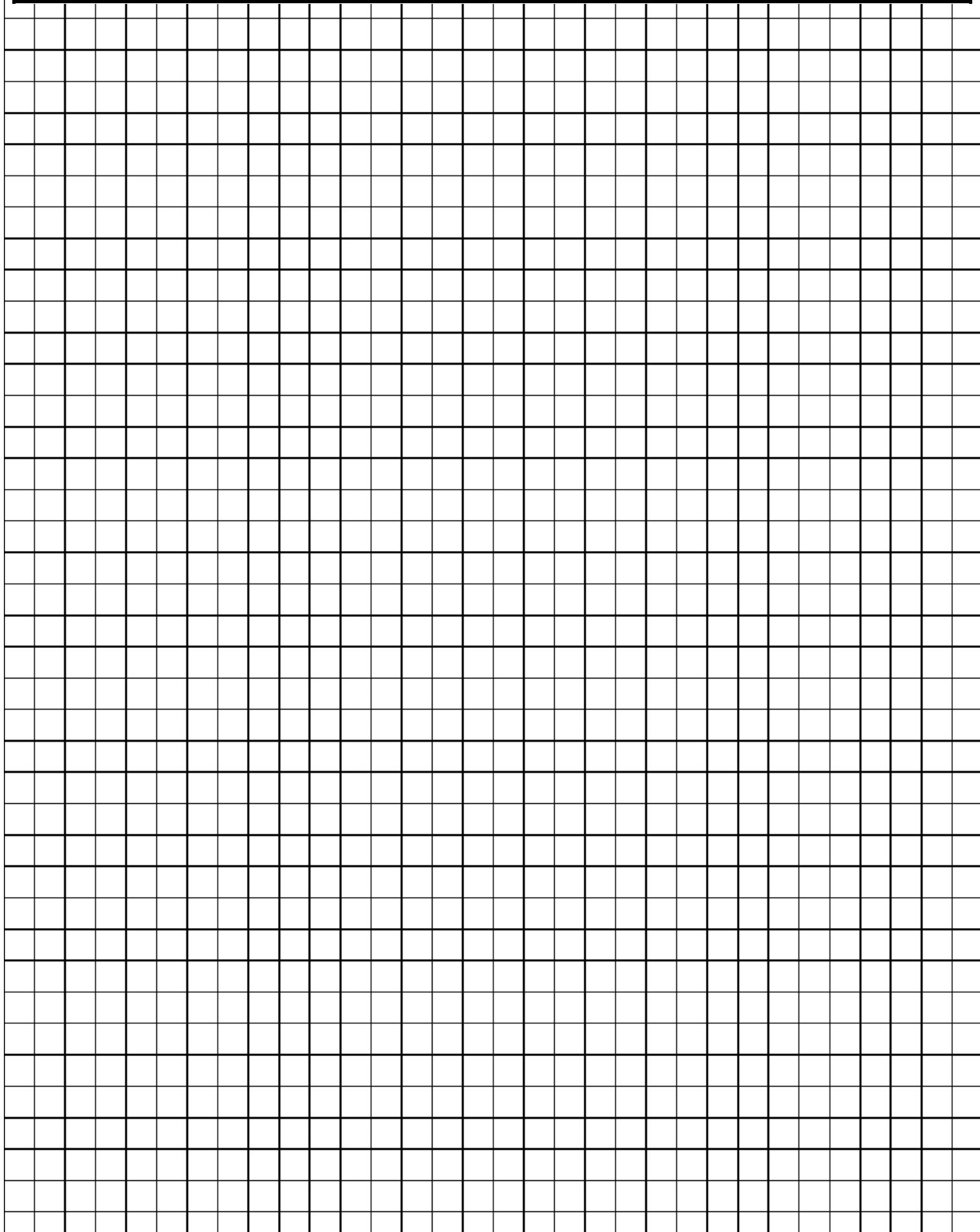
№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.



№ 13.

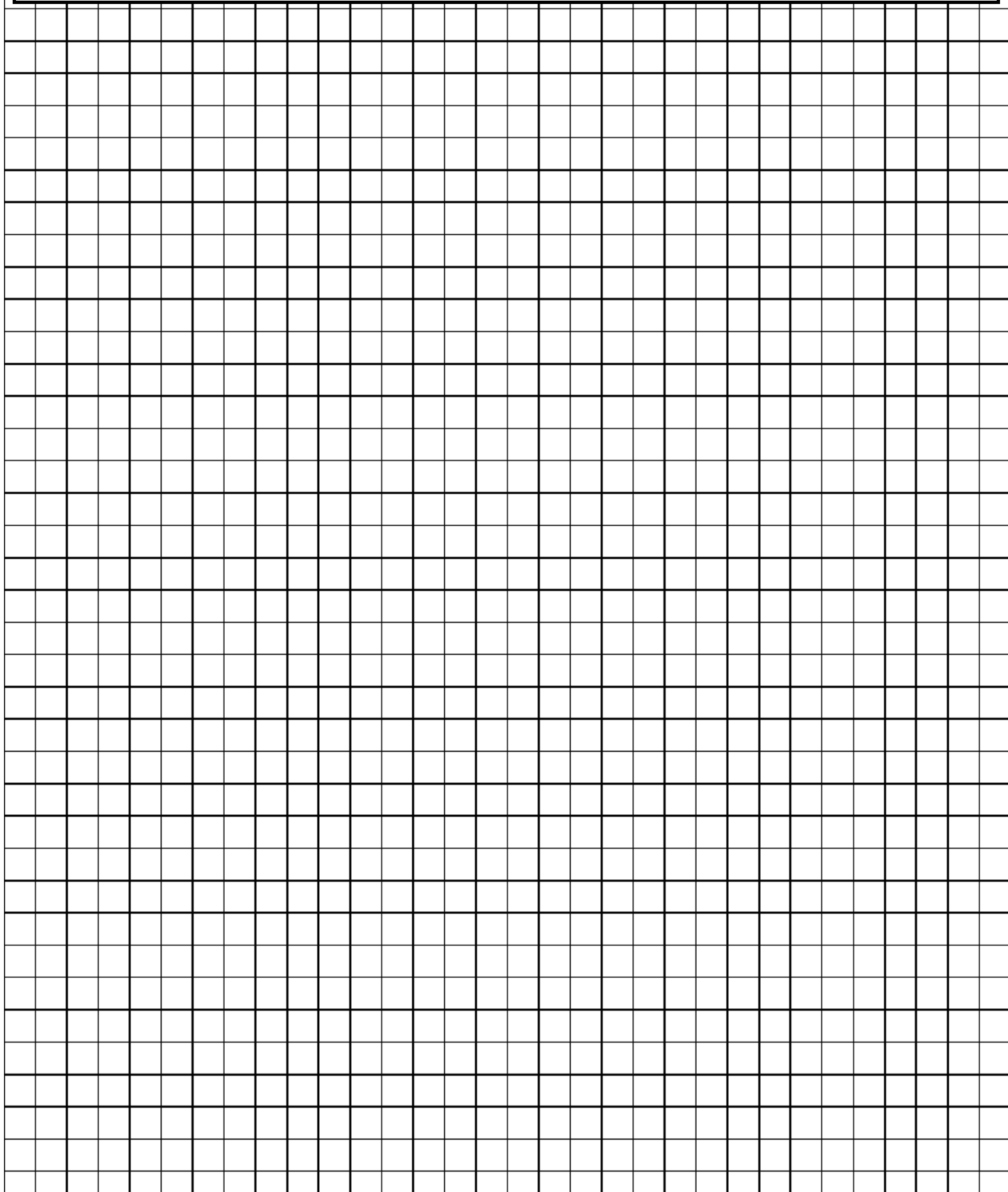
а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x - \cos x} \cdot (\cos x + \cos 2x) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 14.

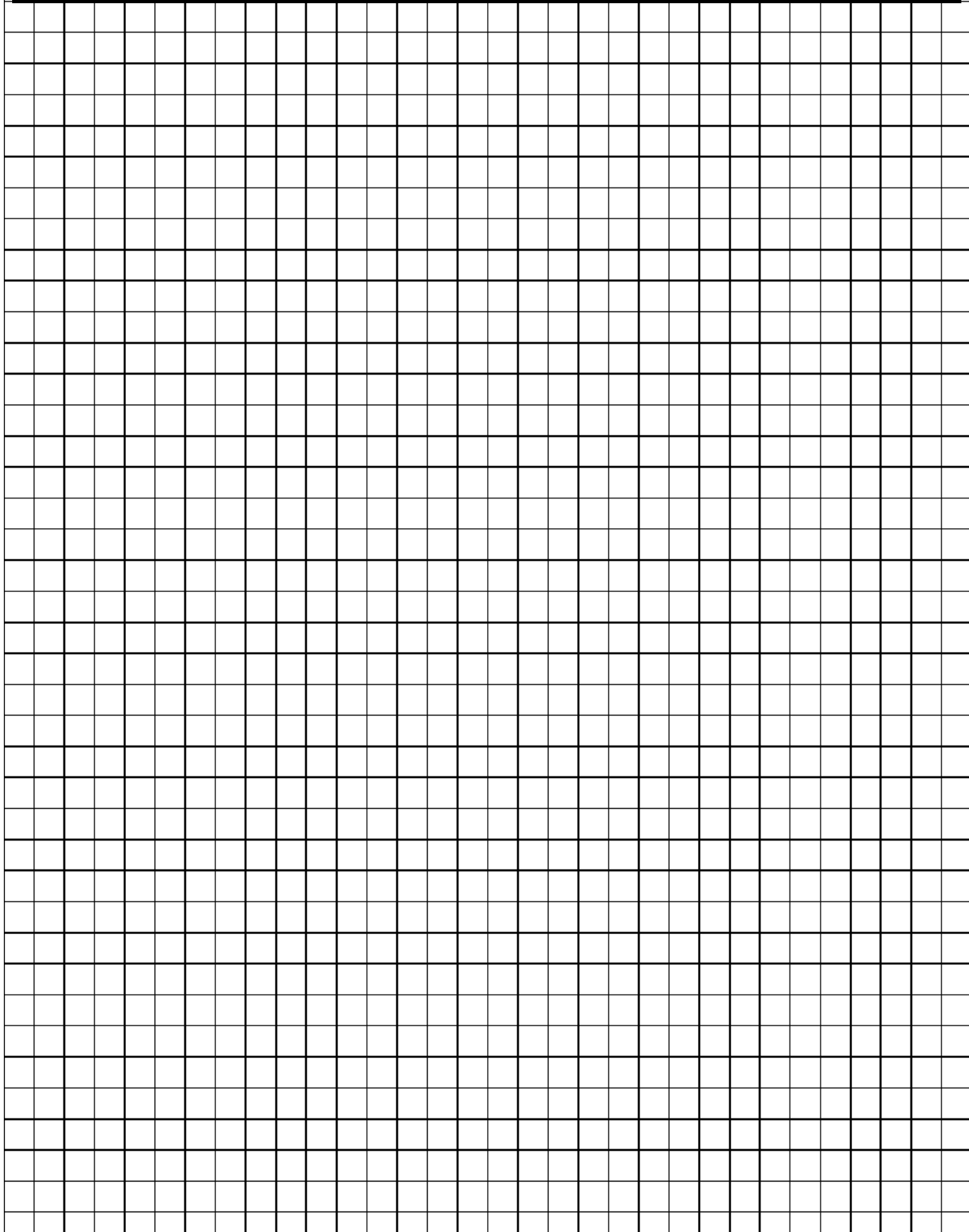
Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB=6$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 5$. Точка K делит сторону SB так, что $SK:KB=4:3$. Ребро $SA = 4\sqrt{3}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

- а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α .
- б) Найдите площадь сечения α .



№ 15.

Решите неравенство $\log_2(x+1)^2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4\log_2(x+1) + 4\log_3(-x) + 4 \leq 0$.



№ 16.

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 9 миллионов рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 декабря 2029 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тысяч рублей?

№ 17.

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN — биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.

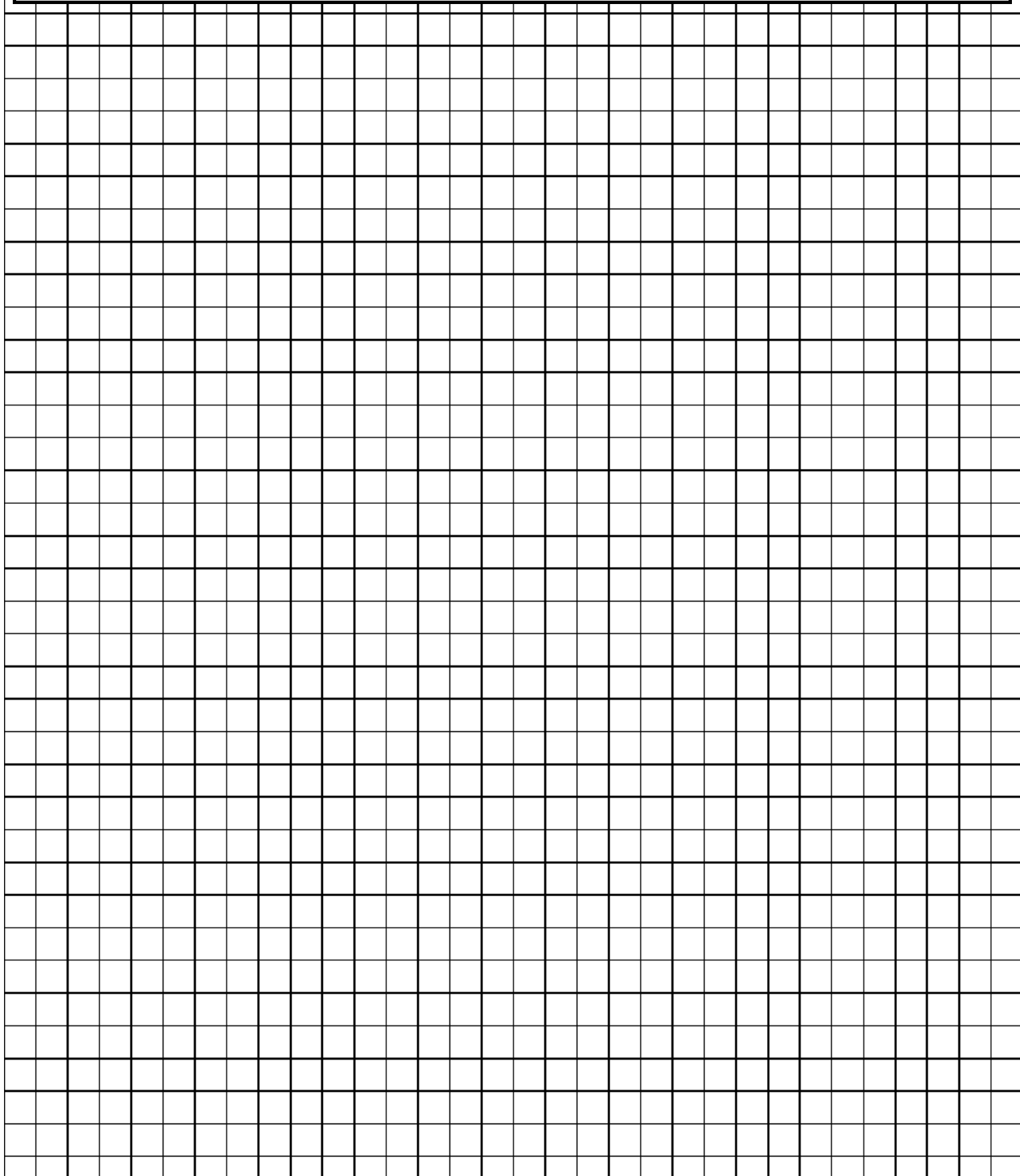
б) Найдите длину отрезка MN , если $BC = 20$ и $\sin \angle ABC = \frac{1}{3}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - 3xy + 4y^2) \cdot (x + y - 1) = 0, \\ y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.



No 19.

За прохождение каждого уровня платной сетевой игры можно получить от одной до трех звезд. При этом со счета участника игры списывается 75рублей при получении одной звезды, 60рублей— при получении двух звезд и 45 рублей при получении трех звезд. Миша прошел несколько уровней игры подряд.

а) Могла ли сумма на его счете уменьшиться при этом на 330 рублей?

б) Сколько уровней игры прошел Миша, если сумма на его счете уменьшилась на 435 рублей, а число полученных им звезд равно 13?

в) За пройденный уровень начисляется 5000 очков при получении трех звезд, 3000 — при получении двух звезд и 2000 — при получении одной звезды. Какую наименьшую сумму (в рублях) мог потратить на игру Миша, если он набрал 50 000 очков, получив при этом 32 звезды?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27249	8
2	27739	40
3	27193	18
4	320190	0,1
5	320211	0,0296
6	77380	5
7	510424	-0,2
8	525691	13
9	27991	30
10	27482	10
11	509241	2,75
12	26698	-14

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

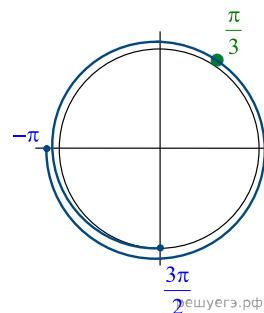
Решение. а) Под знаками обоих радикалов находятся полные квадраты:

$$\sqrt{\sin^2 0,5x + 2 \sin 0,5x + 1} - \sqrt{(4 \sin 0,5x - 6)^2} = -2,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \sin \frac{x}{2} + 1 \right| - \left| 4 \sin \frac{x}{2} - 6 \right| = -\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| 4 \sin \frac{x}{2} - 6 \right| = \sin \frac{x}{2} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left| \sin \frac{x}{2} + 1 \right| - \left| 4 \sin \frac{x}{2} - 6 \right| = -\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \left| 4 \sin \frac{x}{2} - 6 \right| = \sin \frac{x}{2} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin \frac{x}{2} - 6 = \sin \frac{x}{2} + \frac{7}{2}, \\ 4 \sin \frac{x}{2} - 6 = -\sin \frac{x}{2} - \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin \frac{x}{2} = \frac{19}{2} > 3, \\ 5 \sin \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходит $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка N — середина ребра AC , прямая BN пересекает плоскость α в точке H , а SO — высота пирамиды $SABC$. Поскольку пирамида $SABC$ правильная, точка пересечения медиан треугольника ABC совпадает с точкой O . Значит, прямая SO лежит в плоскости SBN . Следовательно, плоскость SBN перпендикулярна плоскости ABC .

Получаем, что прямая KH , являющаяся прямой пересечения плоскостей SBN и α , перпендикулярна плоскости ABC и параллельна прямой SO . В треугольнике SOB имеем:

$$BH = \frac{KB}{SB} \cdot OB = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} BN = \frac{2}{7} BN.$$

Рассмотрим треугольник ABC . Пусть L — такая точка на отрезке AM , что прямые LN и CM параллельны, а H_1 — точка пересечения прямых BN и CM . Тогда отрезок LN — средняя линия треугольника ACM . Следовательно,

$$AL = LM = \frac{AM}{2} = 2,5.$$

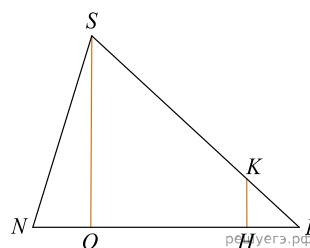
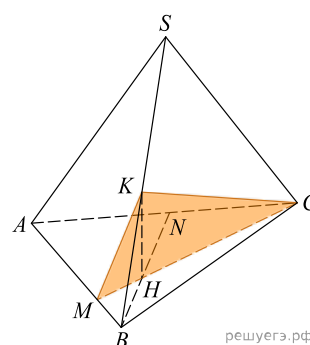
Получаем:

$$BH_1 = \frac{BM}{BL} \cdot BN = \frac{1}{1+2,5} BN = \frac{2}{7} BN.$$

Таким образом, прямая CM делит отрезок BN в таком же отношении, что и плоскость α , значит, плоскость α содержит точку C .

б) Из доказанного в пункте а) следует, что искомое сечение — треугольник CKM . В треугольнике SOB имеем:

$$OB = \frac{2}{3} BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$



$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 6;$$

$$KH = \frac{KB}{SB} \cdot SO = \frac{18}{7}.$$

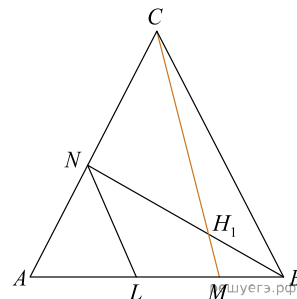
По теореме косинусов в треугольнике BCM имеем:

$$CM = \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{31}.$$

Отрезок KH перпендикулярен плоскости ABC , а значит, и прямой CM . Следовательно, он является высотой треугольника CKM . Площадь треугольника CKM равна

$$\frac{CM \cdot KH}{2} = \frac{9\sqrt{31}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{31}}{7}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} -\log_2(x+1) \cdot \log_3(-x) - \log_2(x+1) + \log_3(-x) + 1 &\leq 0 \Leftrightarrow (1 - \log_2(x+1))(1 + \log_3(-x)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ -\log_2(x+1) \cdot \log_3(-x) - \log_2(x+1) + \log_3(-x) + 1 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 - \log_2(x+1))(1 + \log_3(-x)) &\leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\log_2 2 - \log_2(x+1)) \left(\log_3(-x) - \log_3 \frac{1}{3} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \left(x + \frac{1}{3} \right) \leq 0, \\ -1 < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x < 0. \Leftrightarrow (\log_2 2 - \log_2(x+1)) \left(\log_3(-x) - \log_3 \frac{1}{3} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \left(x + \frac{1}{3} \right) \leq 0, \\ -1 < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x < 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0 \right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Долг должен уменьшаться равномерно с 9 млн руб. до нуля за 36 месяцев, значит, ежемесячно долг должен уменьшаться на $\frac{9}{36} = 0,25$ млн руб., а выплаты будут составлять арифметическую прогрессию. Первая выплата (в январе 2027) будет равна $9k - 8,75$ млн руб., двенадцатая выплата (в декабре 2027) будет равна $6,25k - 6$ млн руб., а сумма выплат за 2027 год равна

$$\frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 \text{ млн руб.,}$$

что по условию равно 4,83 млн руб. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 = 4,83 &\Leftrightarrow 15,25k - 14,75 = 0,805 \Leftrightarrow 15,25k = 15,555 \Leftrightarrow k = 1,02. \\ \frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 = 4,83 &\Leftrightarrow 15,25k - 14,75 = 0,805 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 15,25k = 15,555 \Leftrightarrow k = 1,02. \end{aligned}$$

Отсюда $1 + \frac{r}{100} = 1,02$, то есть $r = 2$.

Ответ: 2.

№ 17.

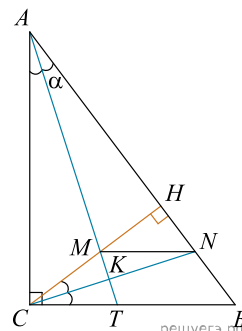
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Построим прямую AM до пересечения с прямой CM в точке K . Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда $\angle CAM = \angle MAN = \alpha$. По свойству прямоугольного треугольника $\angle B = 90^\circ - 2\alpha$. Треугольник CHN прямоугольный, $\angle HCN = 90^\circ - 90^\circ + 2\alpha = 2\alpha$, тогда $\angle HCK = \angle KCB = \alpha$. $\angle ACK = 90^\circ - \alpha$, поэтому в треугольнике ACK имеем $\angle AKC = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$, тогда прямые AM и CN перпендикулярны.

б) Заметим, что в треугольнике ACN отрезок AK является биссектрисой и высотой, а значит, треугольник ACN равнобедренный. Тогда $CK = KN$. Таким образом, отрезок AK является серединным перпендикуляром к стороне CN , а значит, $CM = MN$. Аналогично прямая CK — биссектриса и высота в треугольнике MCT , следовательно, треугольник является равнобедренным и $CM = CT$.

Воспользуемся свойством биссектрисы для треугольника ABC :

$$\frac{CT}{AC} = \sin \angle ABC = \frac{1}{2}$$



Таким образом, $CT = 5$, $TB = 15$. Получаем, $MN = CT = CM = 5$.

Ответ: б) 5.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(y - x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - 3xy + 4y^2) \cdot (x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 - x - 1 = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 0, \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ \left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0, \\ y = -x + 1. \end{cases}$$

В системе координат xOy графиком первого уравнения совокупности является парабола $y = x^2 + x + 1$, графиком второго уравнения — точка $(0; 0)$, графиком третьего уравнения — прямая $y = -x + 1$. Графиком второго уравнения исходной системы является семейство прямых $y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1$. Рассмотрим взаимное расположение графиков.

Найдём точки пересечения графиков функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = -x + 1$:

$$x^2 + x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

Значит, графики пересекаются в точках $(0; 1)$ и $(-2; 3)$

Найдём точки пересечения графиков функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1$:

$$x^2 + x + 1 = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 2ax + x - a^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Значит, при любом значении параметра a прямая $y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1$ является касательной к параболе $y = x^2 + x + 1$ в точке $(a; a^2 + a + 1)$.

Найдём значения параметра a , при которых прямая $y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1$ проходит через точку $(0; 0)$:

$$0 = (2a + 1) \cdot 0 - a^2 + 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Найдём значения параметра a , при которых прямая $y = (2a + 1) \cdot x - a^2 + 1$ параллельна или совпадает с прямой $y = -x + 1$, приравняв угловые коэффициенты. Получаем: $2a + 1 = -1$, откуда $a = -1$. При $a = -1$ получаем:

$$y = (2 \cdot (-1) + 1) \cdot x - (-1)^2 + 1 \Leftrightarrow y = -x$$



значит, прямые параллельны. При остальных значениях параметра a

$$(2a+1) \cdot x - a^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{2a+2}$$

прямые имеют одну общую точку $\left(\frac{a^2}{2a+2}; \frac{2a+2-a^2}{2a+2}\right)$.

Таким образом, прямая $y = (2a+1) \cdot x - a^2 + 1$ имеет с графиком первого уравнения исходной системы

— при $a = -2$ одну общую точку $(-2; 1)$;

— при $a = 0$ одну общую точку $(0; 1)$;

— при $a = 1$ три общие точки $(0; 0)$, $(1; 3)$ и $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$;

— при всех остальных значениях параметра a две общие точки $(a; a^2 + a + 1)$ и $\left(\frac{a^2}{2a+2}; \frac{2a+2-a^2}{2a+2}\right)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта a ; — обоснованное решение пункта b ; — оценка в пункте b ; — пример в пункте b , обеспечивающий точность найденной оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например, если он прошел 4 уровня на 2 звезды и 2 уровня на 3 звезды, поскольку $4 \cdot 60 + 2 \cdot 45 = 330$.

б) Допустим, он прошел x уровней на 1 звезду, y — на две и z уровней на три звезды. Тогда $x + 2y + 3z = 13$ и $75x + 60y + 45z = 435$, откуда делением на 15 получаем $5x + 4y + 3z = 29$. Складывая это уравнение с первым, получим $6x + 6y + 6z = 42$, откуда $x + y + z = 7$. Это и есть число пройденных уровней.

в) Допустим, он прошел x уровней на 1 звезду, y — на две и z уровней на три звезды. Тогда $x + 2y + 3z = 32$ и $2000x + 3000y + 5000z = 50000$, а найти нужно наименьшее значение выражения $75x + 60y + 45z = 15(5x + 4y + 3z)$. Из первого уравнения имеем $x = 32 - 3z - 2y$, подставляя во второе $2x + 3y + 5z = 50$, последовательно находим:

$$2(32 - 3z - 2y) + 3y + 5z = 50 \Leftrightarrow y + z = 14 \Leftrightarrow y = 14 - z.$$

Тогда $x = 32 - 3z - 2(14 - z) = 4 - z$, следовательно, $0 \leq z \leq 4$.

Наконец, $5x + 4y + 3z = 5(4 - z) + 4(14 - z) + 3z = 76 - 6z$. Чтобы это выражение было минимально, следует взять максимально возможное z , то есть $z = 4$. Тогда $x = 0$, $y = 10$ и $15(5x + 4y + 3z) = 15 \cdot 52 = 780$ рублей.

Ответ: а) да; б) 7; в) 780 рублей.