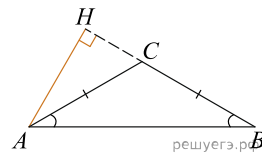


Вариант 83

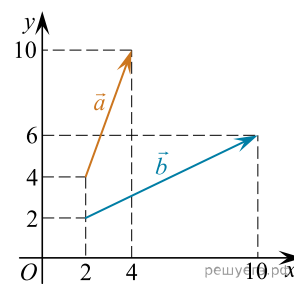
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите высоту AH .



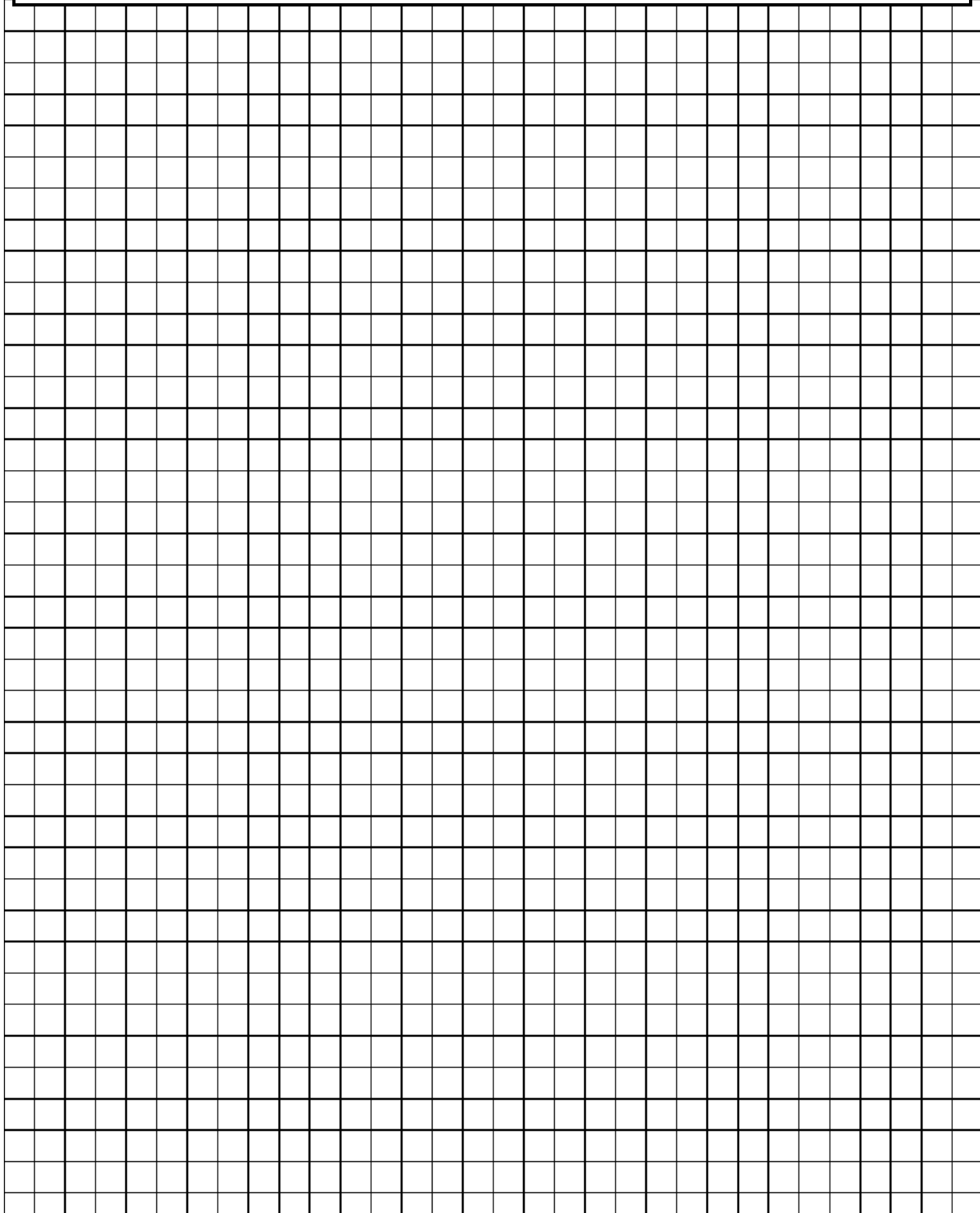
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



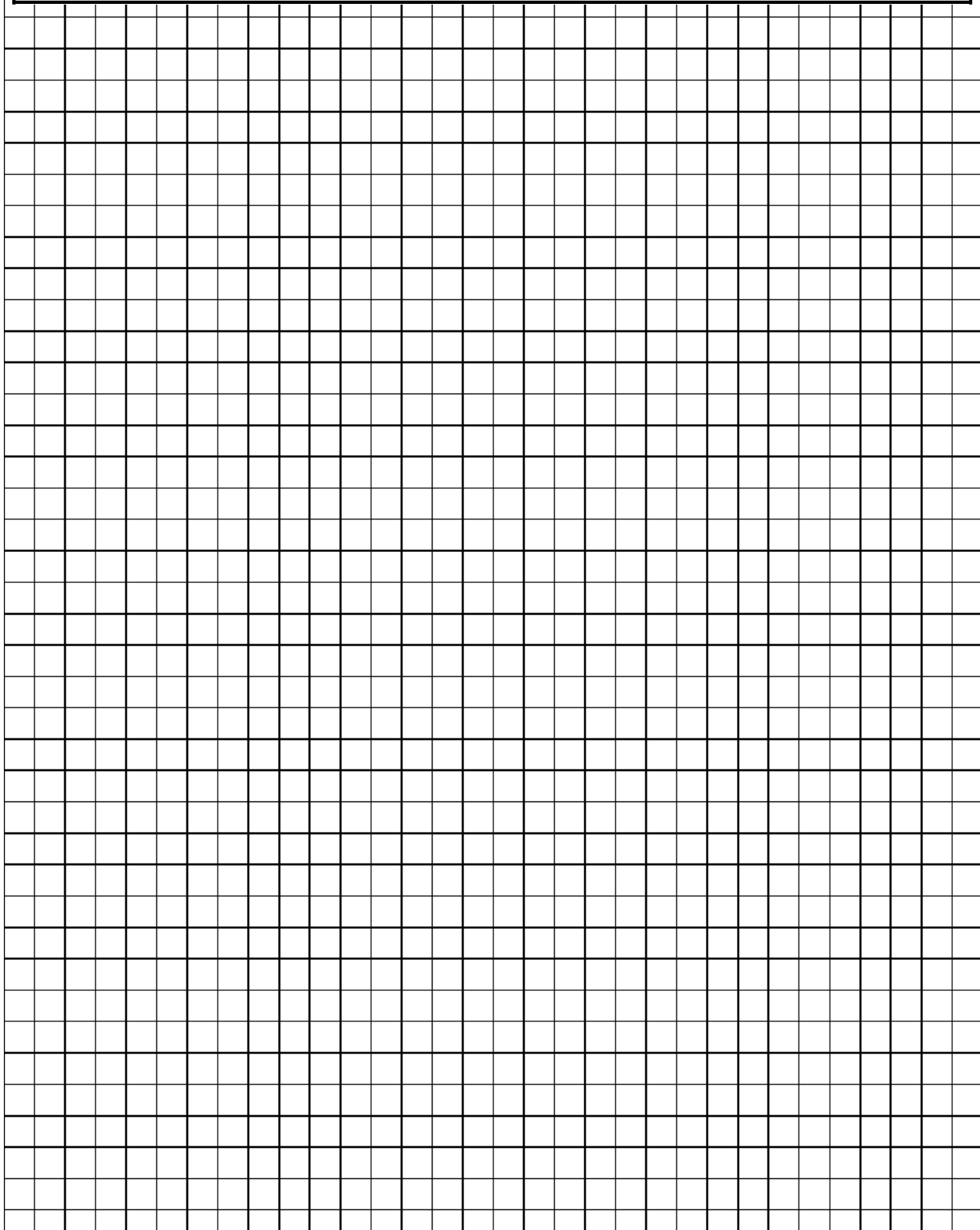
№ 3.

Кусок льда представляет собой правильную шестиугольную призму высотой 18см. Его планируют расплавить и вновь заморозить так, чтобы получилась правильная треугольная призма, сторона основания которой в 2 раза больше стороны основания исходной. Чему будет равна её высота? Ответ дайте в сантиметрах.



№ 4.

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

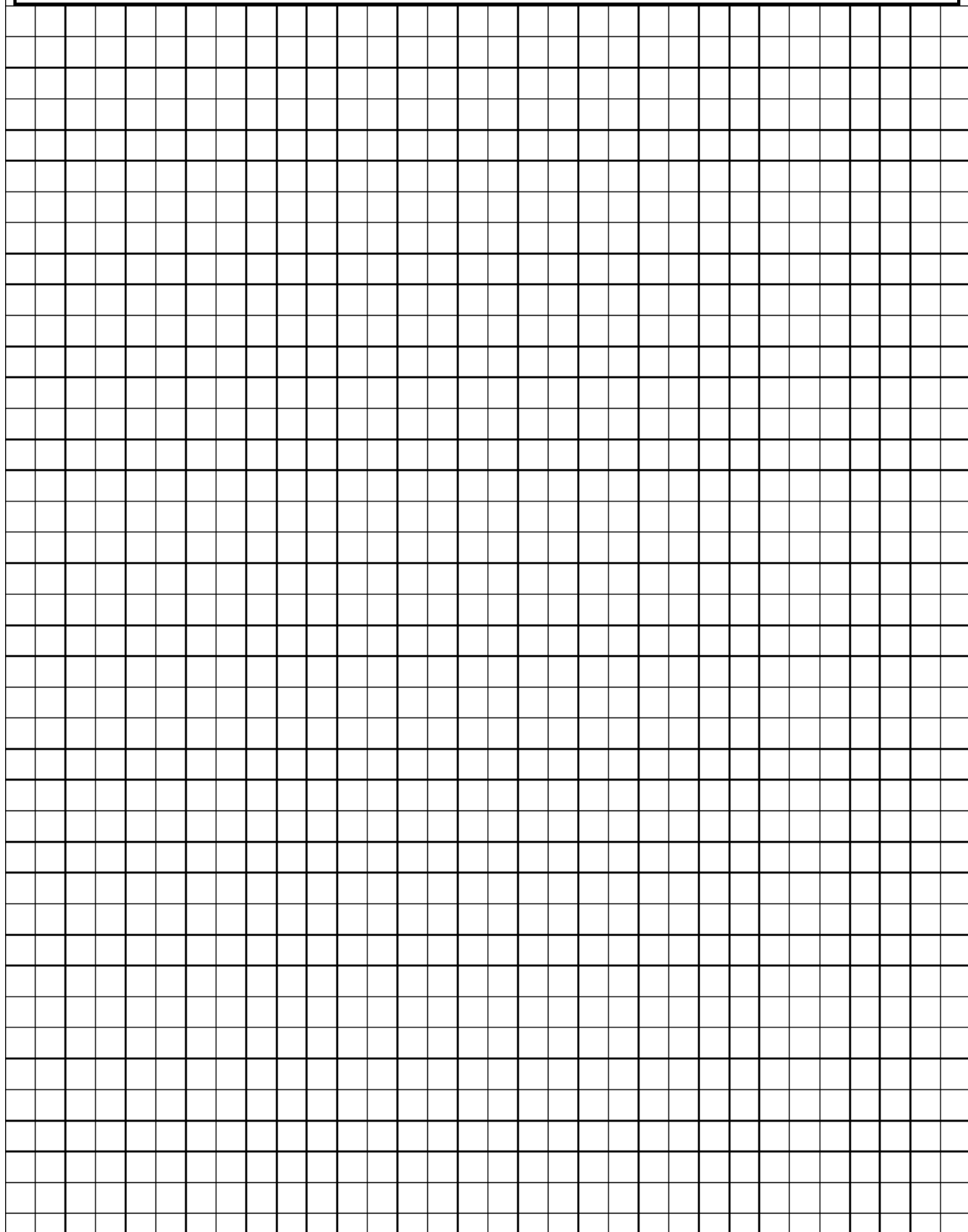


№ 5.

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

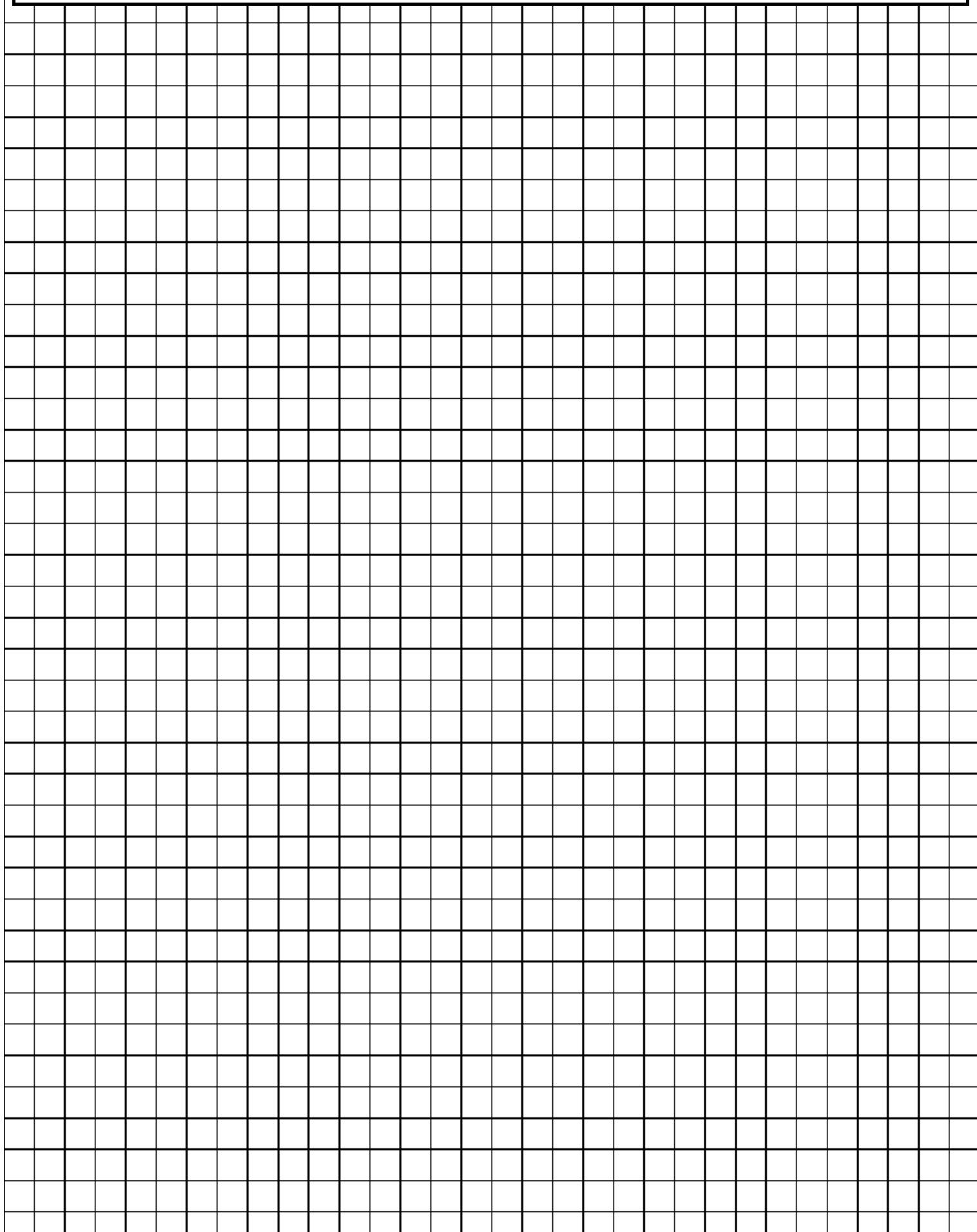
№ 6.

Найдите корень уравнения $2^{\log_8(5x-3)} = 4$.



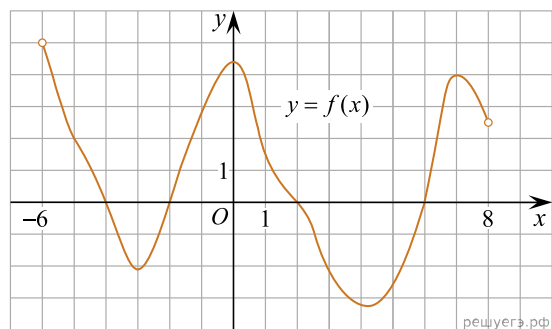
№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$.



№ 8.

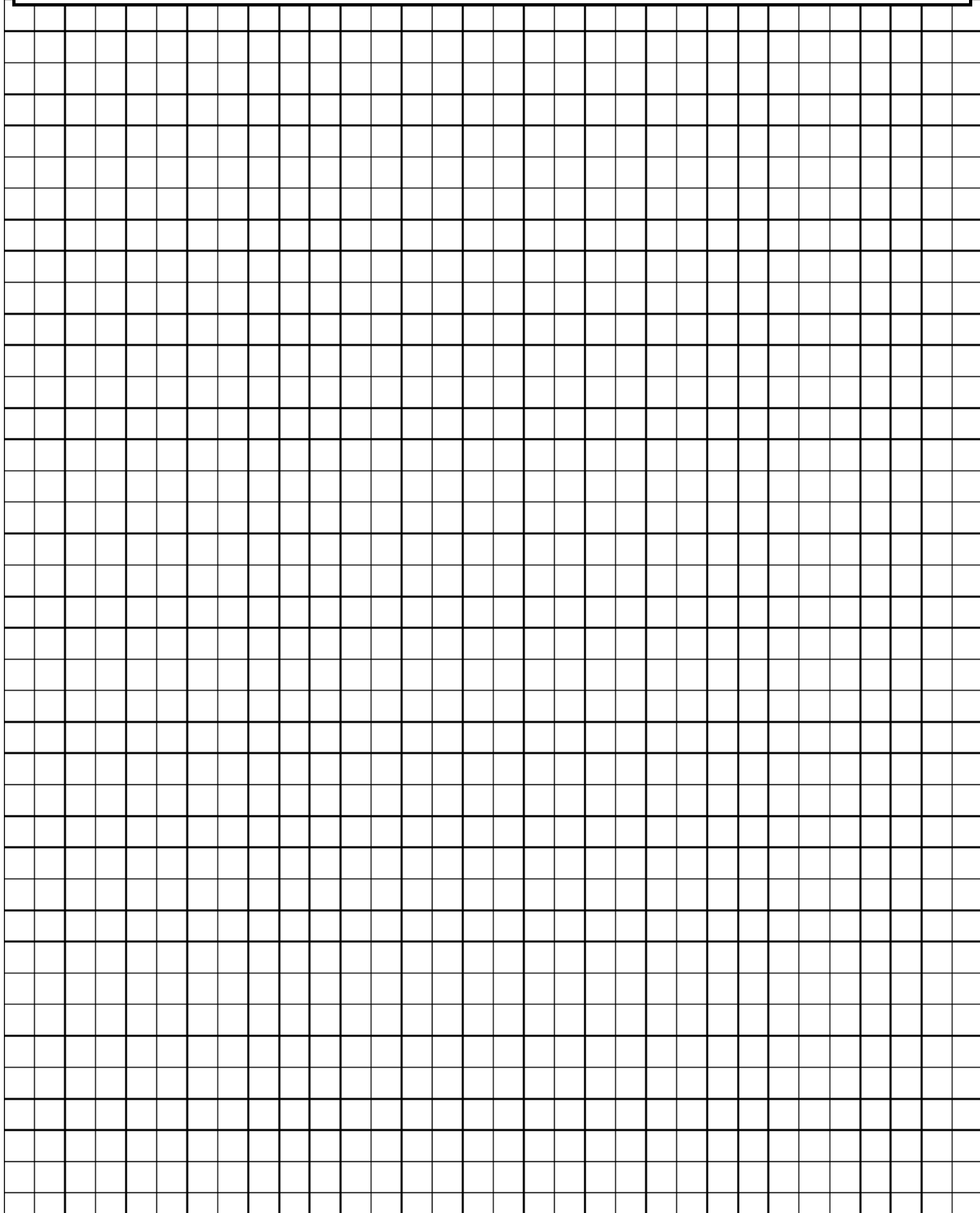
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



reshyaga.ru

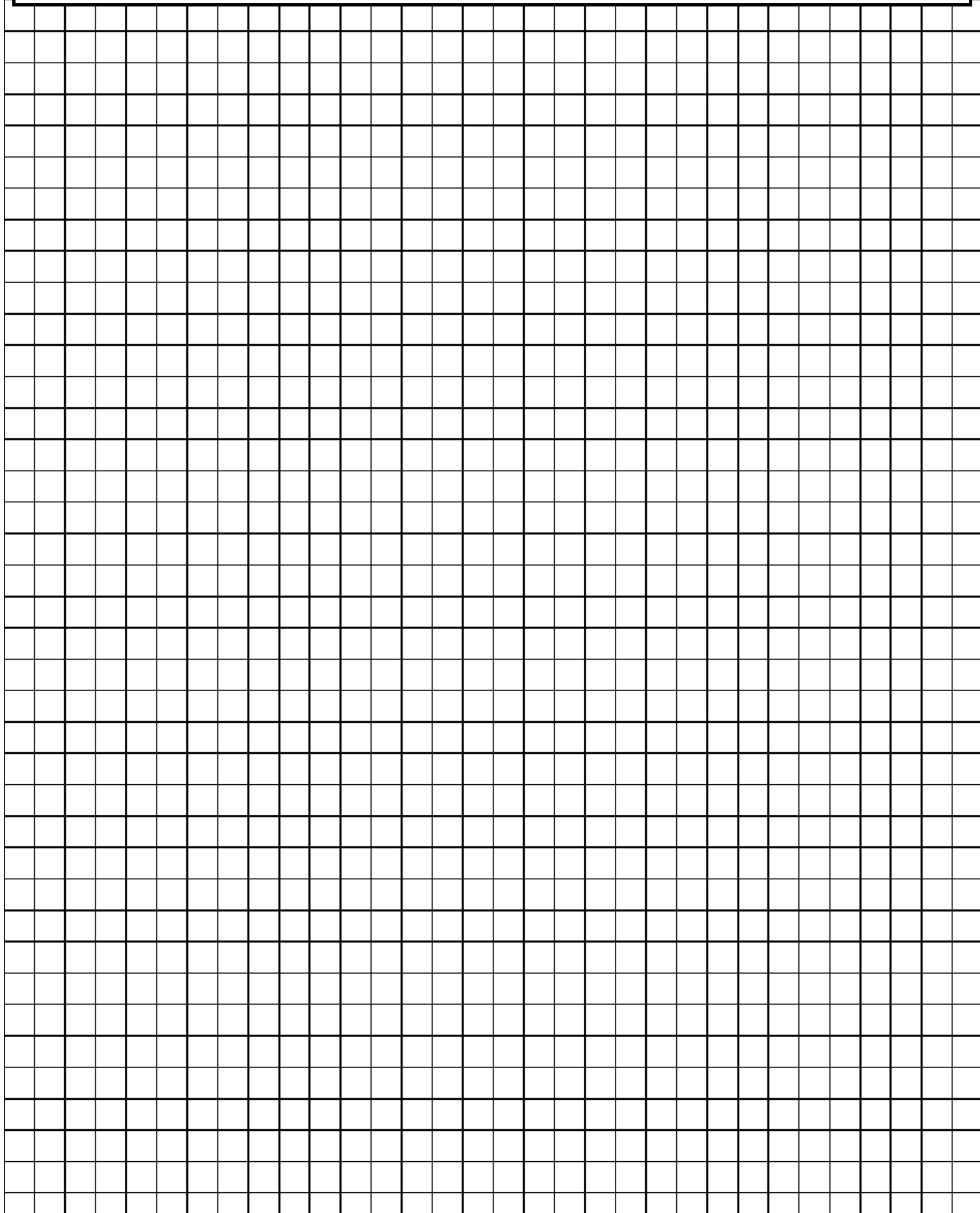
№ 9.

Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?



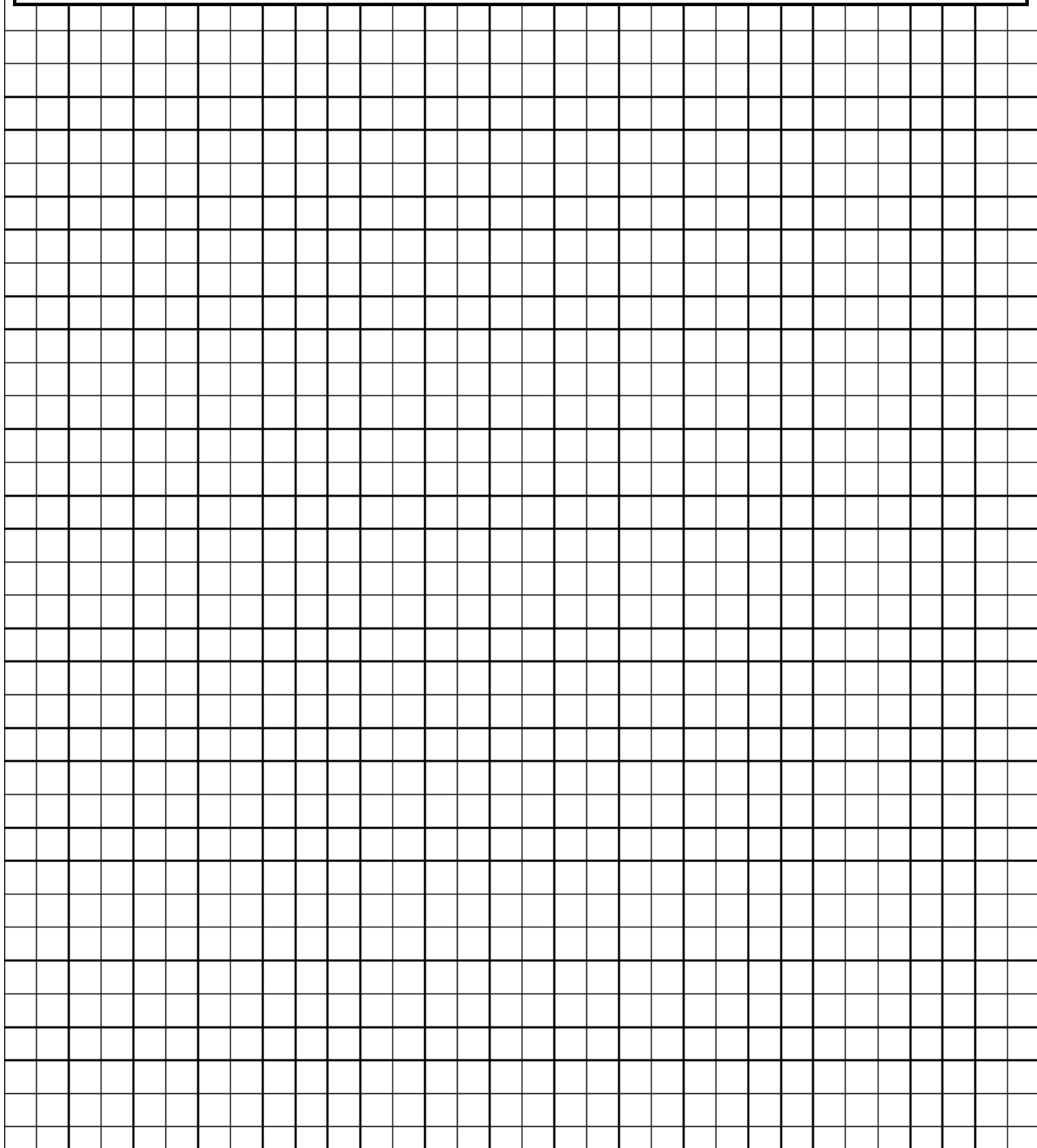
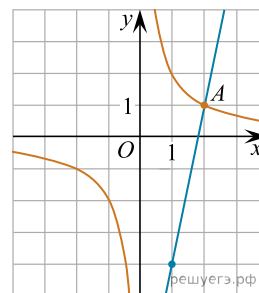
№ 10.

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите(в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.



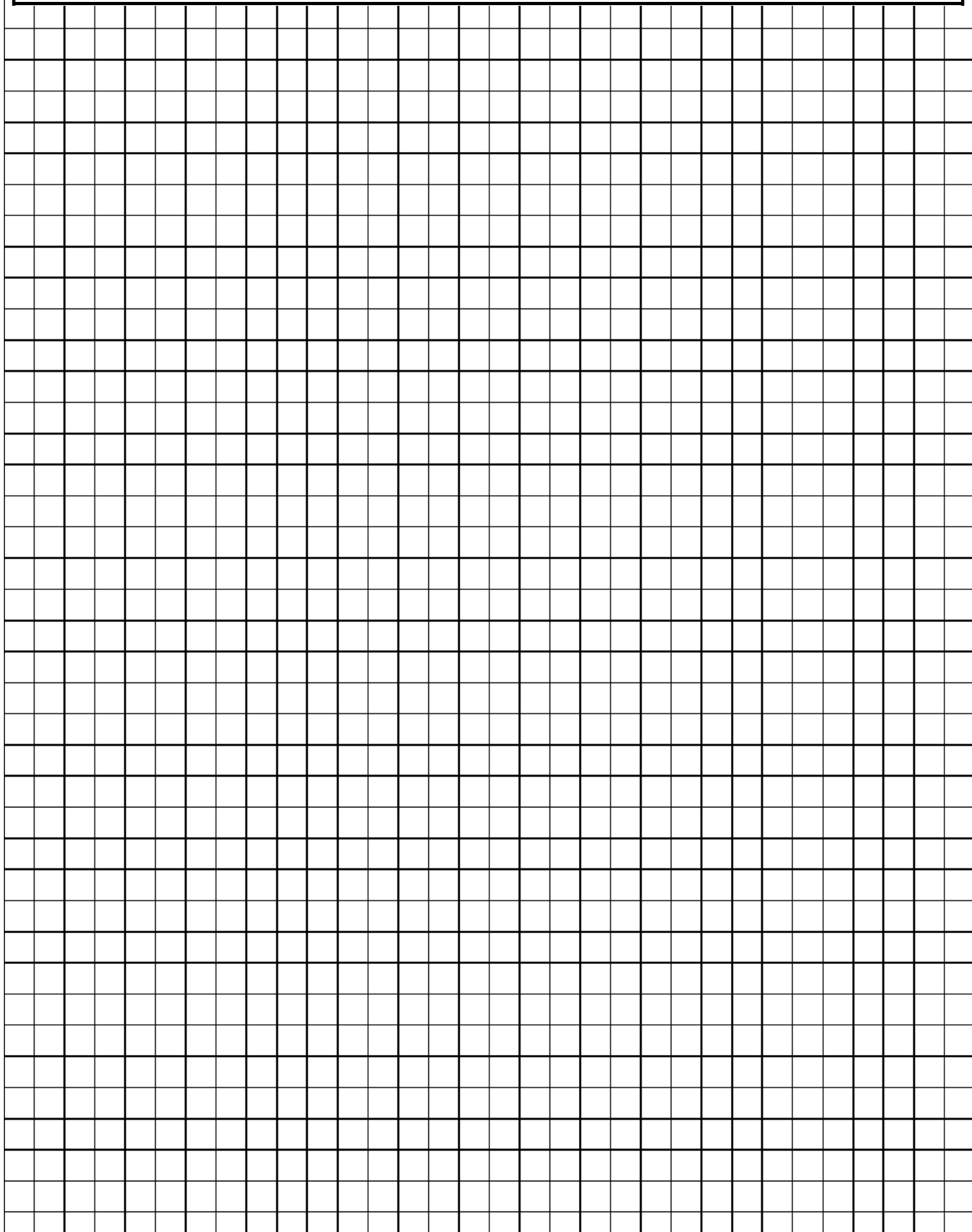
№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.



№ 13.

а) Решите уравнение $(\cos x - \sin x)^2 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) + \sqrt{3} \cos x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right]$.

№ 14.

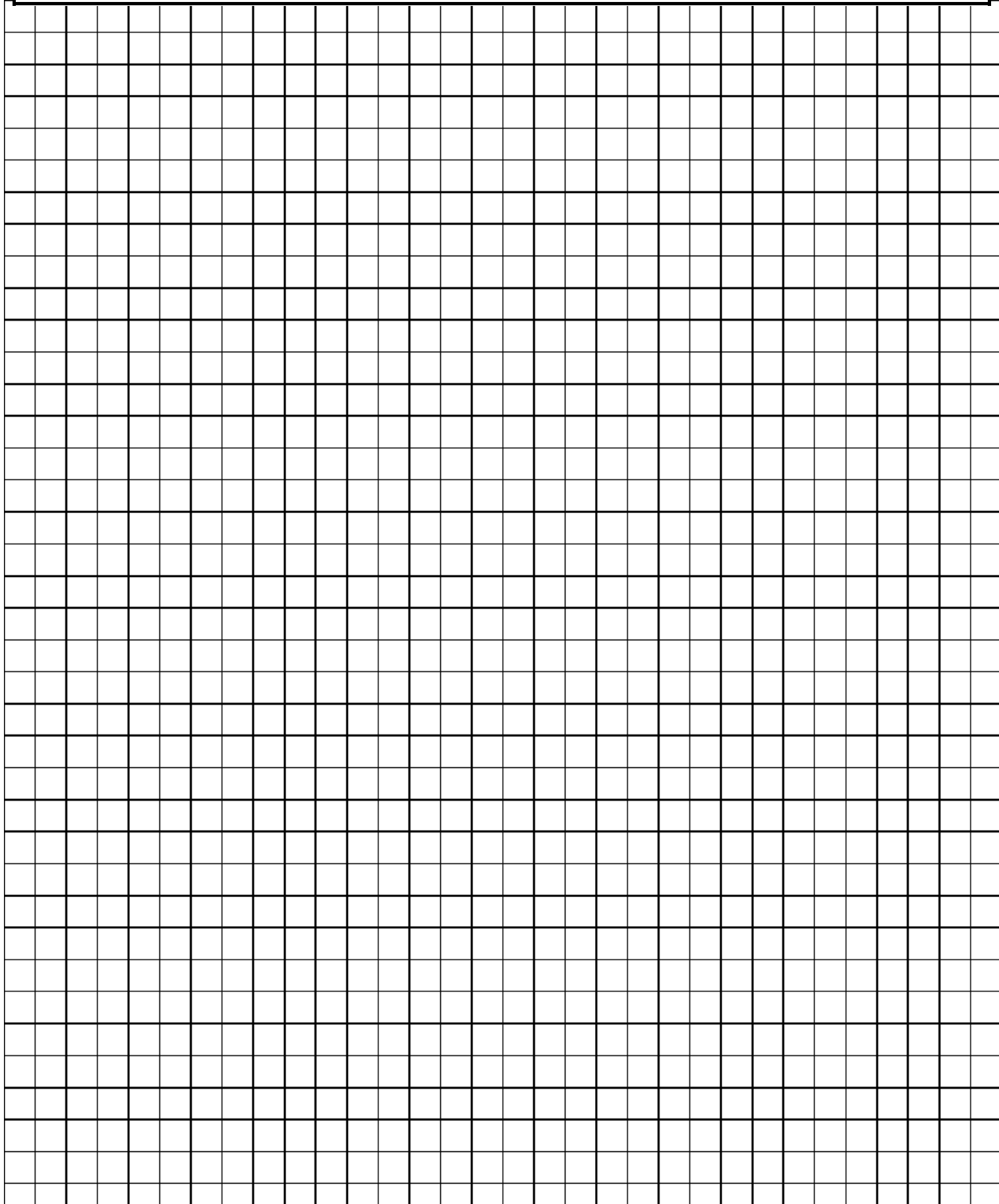
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AD = 2AA_1$, $AB = 3AA_1$. Плоскость α проходит через вершины A и C_1 и пересекает ребро CD в точке N такой, что $CN = 2ND$.

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $2 : 1$.
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , если $AA_1 = 1$.

№ 15.

Решите неравенство:

$$\frac{1}{\log_{x-3} 0,5} - \log_{x-2}(x+5) + \log_{0,5}(x+5) \geq \log_{x-2}(x-3).$$



№ 16.

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на 9 миллионов рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 декабря 2029 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тысяч рублей?

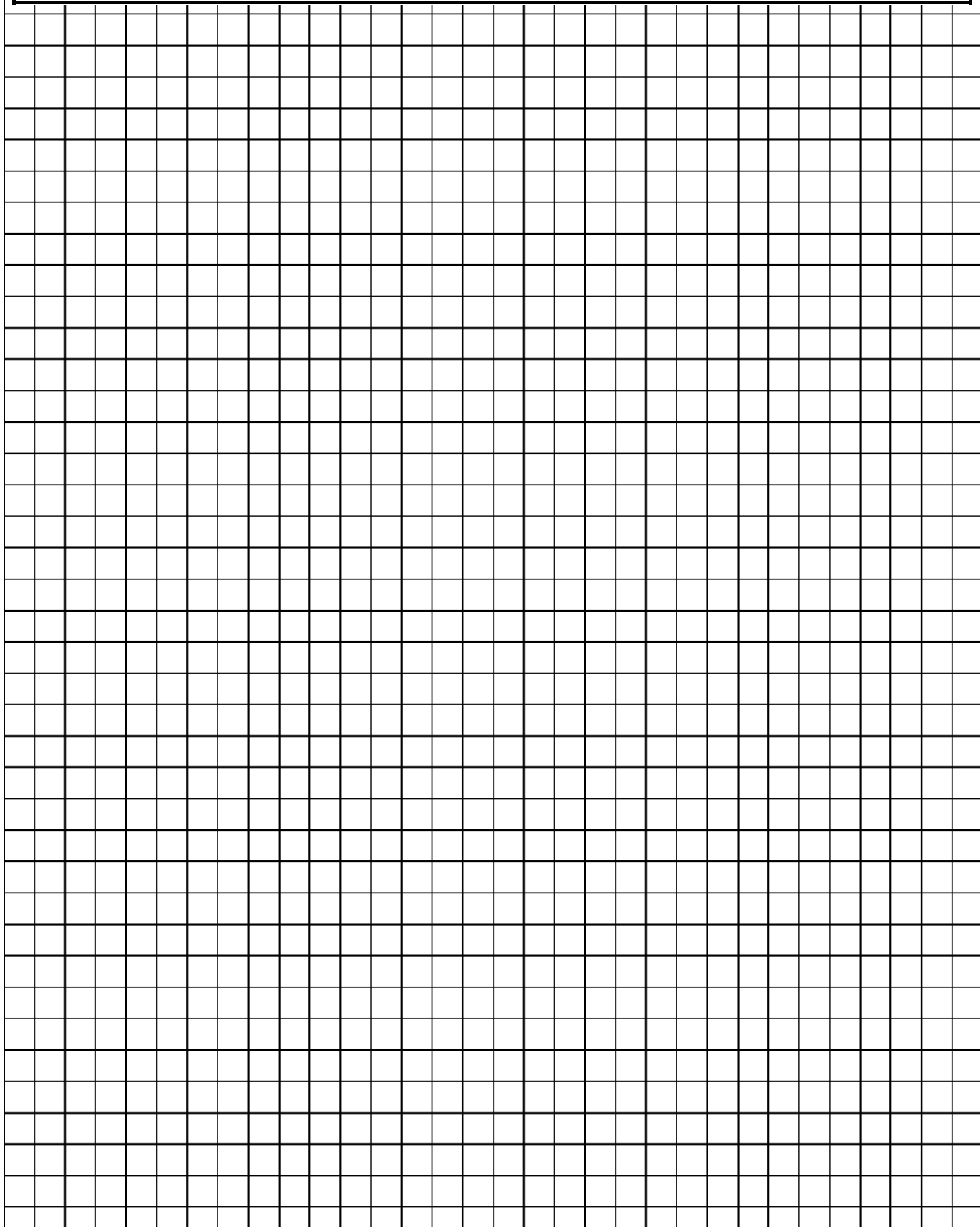
№ 17.

Диагональ трапеции делит ее на два подобных прямоугольных треугольника, в каждый из которых вписана окружность.

- а) Докажите, что произведение оснований трапеции равно квадрату этой диагонали.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, если основания трапеции равны 9 и 25.

№ 18.

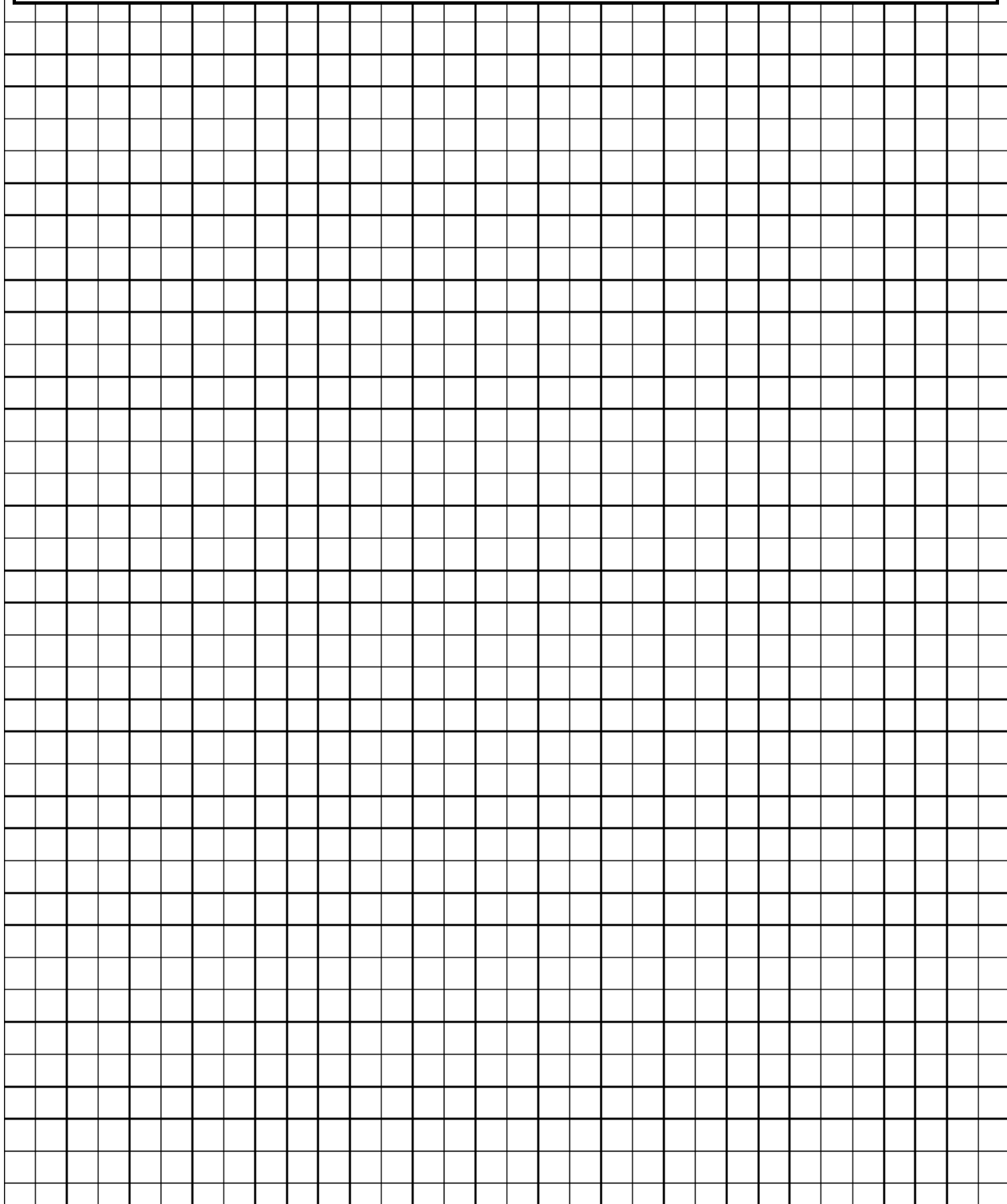
Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 + a - 2|x| = 0$ имеет более трех различных решений.



№ 19.

На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма всех записанных на доске чисел равна 1135.

- а) Может ли на доске быть ровно 31 четное число?
- б) Могут ли ровно семь чисел на доске оканчиваться на 7?
- в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?



Ответы

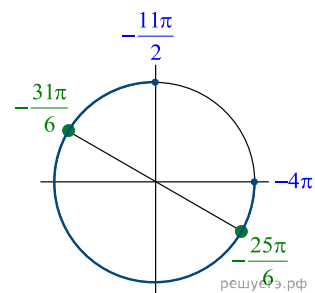
Номер	Задание	Ответ
1	27798	3
2	27739	40
3	639940	27
4	320178	0,5
5	509352	0,25
6	315535	13,4
7	26754	49
8	27487	4
9	28006	60
10	26587	11
11	509182	-10
12	77500	-17

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Применив формулу приведения, используем основное тригонометрическое тождество, получим полный квадрат суммы:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 \sin^2 x &= -3 \sin^2 \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 \sin^2 x &= -3 \cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 \sin^2 x &= -3 \cos^2 x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\operatorname{ctg} x + \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x &= -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности (см.рис.). На заданном промежутке лежат корни:
 $-\frac{31\pi}{6}, -\frac{25\pi}{6}.$

Ответ: а) $\left\{ \frac{5\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{31\pi}{6}, -\frac{25\pi}{6}.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Плоскость α пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым. Пусть эта плоскость пересекается с прямой A_1B_1 в точке M . Тогда прямая AM параллельна прямой NC_1 , а прямая MC_1 — прямой AN , то есть четырехугольник AMC_1N — параллелограмм. Следовательно, $AM = C_1N$, а значит, треугольники AA_1M и C_1CN равны по катету и гипотенузе. Таким образом, $A_1M = CN$, откуда следует, что $A_1M : MB_1 = 2 : 1$.

б) Из условия следует, что $AA_1 = 1$, $AD = 2$, $AB = 3$. Из прямоугольных треугольников ADN и CNN_1 по теореме Пифагора соответственно получаем:

$$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$NC_1 = \sqrt{NC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

то есть четырехугольник AMC_1N — ромб по определению. Диагональ параллелепипеда равна

$$AC_1 = \sqrt{AD^2 + AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

По теореме косинусов в треугольнике ANC_1 :

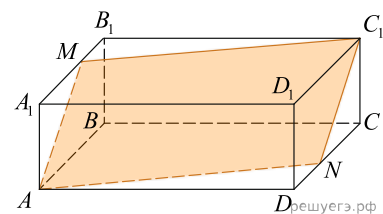
$$\cos \angle ANC_1 = \frac{5 + 5 - 14}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5},$$

а тогда $\sin \angle ANC_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Находим:

$$S_{AMC_1N} = AN \cdot NC_1 \cdot \sin \angle ANC_1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21},$$

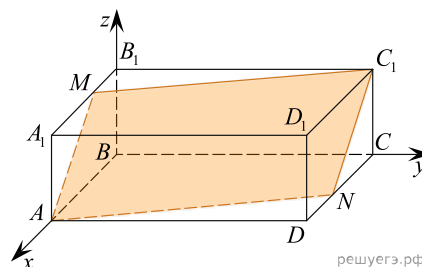
а этот четырехугольник и является сечением параллелепипеда плоскостью α .

Ответ: б) $\sqrt{21}$.



Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Пусть $AA_1 = a$, тогда $AD = 2a$, $AB = 3a$. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат: $A(3a; 0; 0)$, $C_1(0; 2a; a)$, $N(2a; 2a; 0)$. Уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D \neq 0$, поскольку плоскость не проходит через начало координат. Подставляя координаты точек A , C_1 и N , находим:



$$\begin{cases} 3aA + D = 0, \\ 2aB + aC + D = 0, \\ 2aA + 2aB + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ 2aB + aC + D = 0, \\ -\frac{2}{3}D + 2aB + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ -\frac{1}{3}D + aC + D = 0, \\ B = -\frac{1}{6a} \cdot D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ C = -\frac{2}{3a} \cdot D, \\ B = -\frac{1}{6a} \cdot D \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3aA + D = 0, \\ 2aB + aC + D = 0, \\ 2aA + 2aB + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ 2aB + aC + D = 0, \\ -\frac{2}{3}D + 2aB + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ -\frac{1}{3}D + aC + D = 0, \\ B = -\frac{1}{6a} \cdot D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3a} \cdot D, \\ C = -\frac{2}{3a} \cdot D, \\ B = -\frac{1}{6a} \cdot D \end{cases}$$

Полагая $D = -6a$, получаем уравнение плоскости α : $2x + y + 4z - 6a = 0$.

Плоскость α пересекает ребро A_1B_1 в точке $M(x_0; 0; a)$. Подставим координаты этой точки в уравнение плоскости: $2x_0 + 0 + 4a - 6a = 0$, откуда $x_0 = a$. Следовательно, плоскость α делит ребро A_1B_1 в отношении $2 : 1$.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью α есть четырехугольник AMC_1N — параллелограмм по определению. Его площадь равна модулю векторного произведения векторов $\vec{AN} = (-1; 2; 0)$ и $\vec{C_1N} = (2; 0; -1)$, на которых он построен. Находим:

$$\vec{AN} \times \vec{C_1N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k},$$

$$|\vec{AN} \times \vec{C_1N}| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}.$$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Неравенство определено при $x > 3$, $x \neq 4$. На области определения используем свойство логарифма:

$$\frac{1}{\log_{x-3} 0,5} = -\frac{1}{\log_{x-3} 2} = -\log_2(x-3).$$

Перенесем логарифмы из правой части в левую, перейдем к логарифмам по основанию 2, разложим полученную правую часть на множители:

$$\begin{aligned} \log_{x-2}(x-3) + \log_2(x-3) + \log_{x-2}(x+5) - \log_{0,5}(x+5) &= \\ = \frac{\log_2(x-3)}{\log_2(x-2)} + \log_2(x-3) + \frac{\log_2(x+5)}{\log_2(x-2)} + \log_2(x+5) &= \end{aligned}$$

$$= \frac{\log_2(x+5) + \log_2(x-3)}{\log_2(x-2)} + \log_2(x-3) + \log_2(x+5) =$$

$$= (\log_2(x+5) + \log_2(x-3)) \left(1 + \frac{1}{\log_2(x-2)} \right).$$

При $x > 3$ верно неравенство $\log_2(x-2) > 0$, а потому выражение в скобках положительно, и на него можно разделить. Далее применим метод рационализации:

$$\log_2(x+5) + \log_2(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x+5) - \log_2 \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-1) \left(x+5 - \frac{1}{x-3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow x+5 - \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \Leftrightarrow_{x>3, x \neq 4} 3 < x \leq -1 + \sqrt{17}. \quad \log_2(x+5) + \log_2(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x+5) - \log_2 \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-1) \left(x+5 - \frac{1}{x-3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow x+5 - \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow_{x>3}$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-3) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \Leftrightarrow_{x>3, x \neq 4} 3 < x \leq -1 + \sqrt{17}. \quad \log_2(x+5) + \log_2(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+5) - \log_2 \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-1) \left(x+5 - \frac{1}{x-3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow x+5 - \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow_{x>3}$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-3) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \Leftrightarrow_{x>3, x \neq 4} 3 < x \leq -1 + \sqrt{17}. \quad \log_2(x+5) + \log_2(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+5) - \log_2 \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-1) \left(x+5 - \frac{1}{x-3} \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+5 - \frac{1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow_{x>3} (x+5)(x-3) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \Leftrightarrow_{x>3, x \neq 4} 3 < x \leq -1 + \sqrt{17}.$$

Ответ: $(3; -1 + \sqrt{17})$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Долг должен уменьшаться равномерно с 9 млн руб. до нуля за 36 месяцев, значит, ежемесячно долг должен уменьшаться на $\frac{9}{36} = 0,25$ млн руб., а выплаты будут составлять арифметическую прогрессию. Первая выплата (в январе 2027) будет равна $9k - 8,75$ млн руб., двенадцатая выплата (в декабре 2027) будет равна $6,25k - 6$ млн руб., а сумма выплат за 2027 год равна

$$\frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 \text{ млн руб.},$$

что по условию равно 4,83 млн руб. Тогда

$$\frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 = 4,83 \Leftrightarrow 15,25k - 14,75 = 0,805 \Leftrightarrow 15,25k = 15,555 \Leftrightarrow k = 1,02.$$

$$\frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 = 4,83 \Leftrightarrow 15,25k - 14,75 = 0,805 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15,25k = 15,555 \Leftrightarrow k = 1,02. \quad \frac{9k - 8,75 + 6,25k - 6}{2} \cdot 12 = 4,83 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15,25k - 14,75 = 0,805 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15,25k = 15,555 \Leftrightarrow k = 1,02.$$

Отсюда $1 + \frac{r}{100} = 1,02$, то есть $r = 2$.

Ответ: 2.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть основания трапеции — стороны AD и BC . Треугольники ABC и DCA подобны. Заметим, что если $\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC}$, то $BC = AD$, но тогда трапеция $ABCD$ — параллелограмм. Значит, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, а тогда $AC^2 = BC \cdot AD$.

б) Пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей, точки P и Q — их точки касания с отрезком AC . Из пункта а) следует, что $AC^2 = 9 \cdot 25 = 15^2$, откуда $AC = 15$. Пусть для определенности $BC = 9$ и $AD = 25$. Тогда:

$$AB = \sqrt{9^2 + 15^2} = 3\sqrt{34},$$

$$CD = \sqrt{15^2 + 25^2} = 5\sqrt{34}.$$

По формуле радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности находим:

$$O_1P = CP = \frac{9 + 15 - 3\sqrt{34}}{2} = 12 - \frac{3\sqrt{34}}{2},$$

$$O_2Q = AQ = \frac{15 + 25 - 5\sqrt{34}}{2} = 20 - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34}.$$

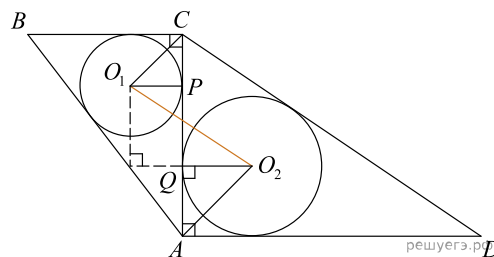
Тогда

$$PQ = 15 - CP - AQ = 4\sqrt{34} - 17,$$

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= PQ^2 + (O_1P + O_2Q)^2 = (4\sqrt{34} - 17)^2 + (32 - 4\sqrt{34})^2 = \\ &= 16 \cdot 34 - 8 \cdot 17\sqrt{34} + 289 + 1024 - 8 \cdot 32\sqrt{34} + 16 \cdot 34 = 2401 - 392\sqrt{34}. \quad O_1O_2^2 = PQ^2 + (O_1P + O_2Q)^2 = (4\sqrt{34} - 17)^2 + (32 - 4\sqrt{34})^2 = \\ &= 16 \cdot 34 - 8 \cdot 17\sqrt{34} + 289 + 1024 - 8 \cdot 32\sqrt{34} + 16 \cdot 34 = \\ &= 2401 - 392\sqrt{34}. \quad O_1O_2^2 = PQ^2 + (O_1P + O_2Q)^2 = \\ &= (4\sqrt{34} - 17)^2 + (32 - 4\sqrt{34})^2 = \\ &= 16 \cdot 34 - 8 \cdot 17\sqrt{34} + 289 + 1024 - 8 \cdot 32\sqrt{34} + 16 \cdot 34 = \\ &= 2401 - 392\sqrt{34}. \end{aligned}$$

Таким образом, находим:

$$O_1O_2 = \sqrt{2401 - 392\sqrt{34}} = 7\sqrt{49 - 8\sqrt{34}} = 7(4\sqrt{2} - \sqrt{17}).$$



Ответ: б) $7(4\sqrt{2} - \sqrt{17})$.

№ 18.

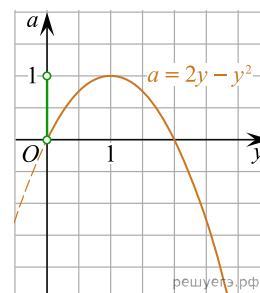
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 + a - 2|x| = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^{10} + x^2 = -(a - 2|x|)^5 - a + 2|x| \Leftrightarrow (x^2)^5 + x^2 = (2|x| - a)^5 + 2|x| - a$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$. Она возрастающая, как сумма двух возрастающих функций. Значит, каждое своё значение она принимает ровно один раз. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $f(x^2) = f(2|x| - a)$, и оно равносильно уравнению $x^2 = 2|x| - a$.

Пусть $y = |x|$, тогда каждому положительному значению y соответствует два различных значения x , значению $y = 0$ соответствует $x = 0$, а отрицательным значениям y не соответствует ни одного значения x . Чтобы исходное уравнение имело более трёх различных решений, уравнение $a = 2y - y^2$ должно иметь два различных положительных корня. Это выполняется при $0 < a < 1$.



Ответ: $(0; 1)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность найденной оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Если бы такое случилось, то среди этих чисел было бы 4 нечетных и 31 четное. Значит, их сумма была бы четна и не могла быть равна 1135.

б) Возьмем наименьшие числа, кончающиеся на 7: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67. Их сумма равна 259. Возьмем наименьшие 27 четных чисел: $2 + 4 + \dots + 54$. Их сумма равна $27 \cdot 28 = 756$. В качестве последнего числа возьмем $1135 - 259 - 756 = 120$.

в) Допустим, на доске написаны n чисел, заканчивающихся на 7 и $35 - n$ четных чисел. Тогда их сумма не меньше, чем сумма наименьших чисел с теми же свойствами. Значит,

$$7 + 17 + \dots + 10(n - 1) + 7 + 2 + 4 + \dots + 2(35 - n) \leq 1135.$$

Дважды воспользовавшись формулой для суммы арифметической прогрессии, получим:

$$n(5n + 2) + (35 - n)(36 - n) \leq 1135 \Leftrightarrow 6n^2 - 69n + 125 \leq 0.$$

Квадратный трехчлен в левой части полученного квадратного неравенства принимает наименьшее значение при $n = \frac{23}{4}$ и возрастает при $n > \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$. При $n = 9$ левая часть равна -10 , а при $n = 10$ она равна 35, поэтому $n \leq 9$. Осталось придумать пример. Можно, например, взять наименьшие 9 чисел, кончающихся на 7 — это числа 7, 27, ..., 87 — и наименьшие 26 четных чисел от 2 до 52. Сумма таких чисел равна 1125. Заменив 52 на 62, получим требуемую сумму.

Ответ: а) нет; б) да; в) 9.