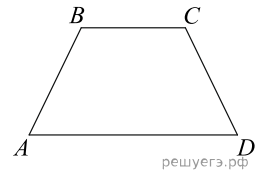


Вариант 84

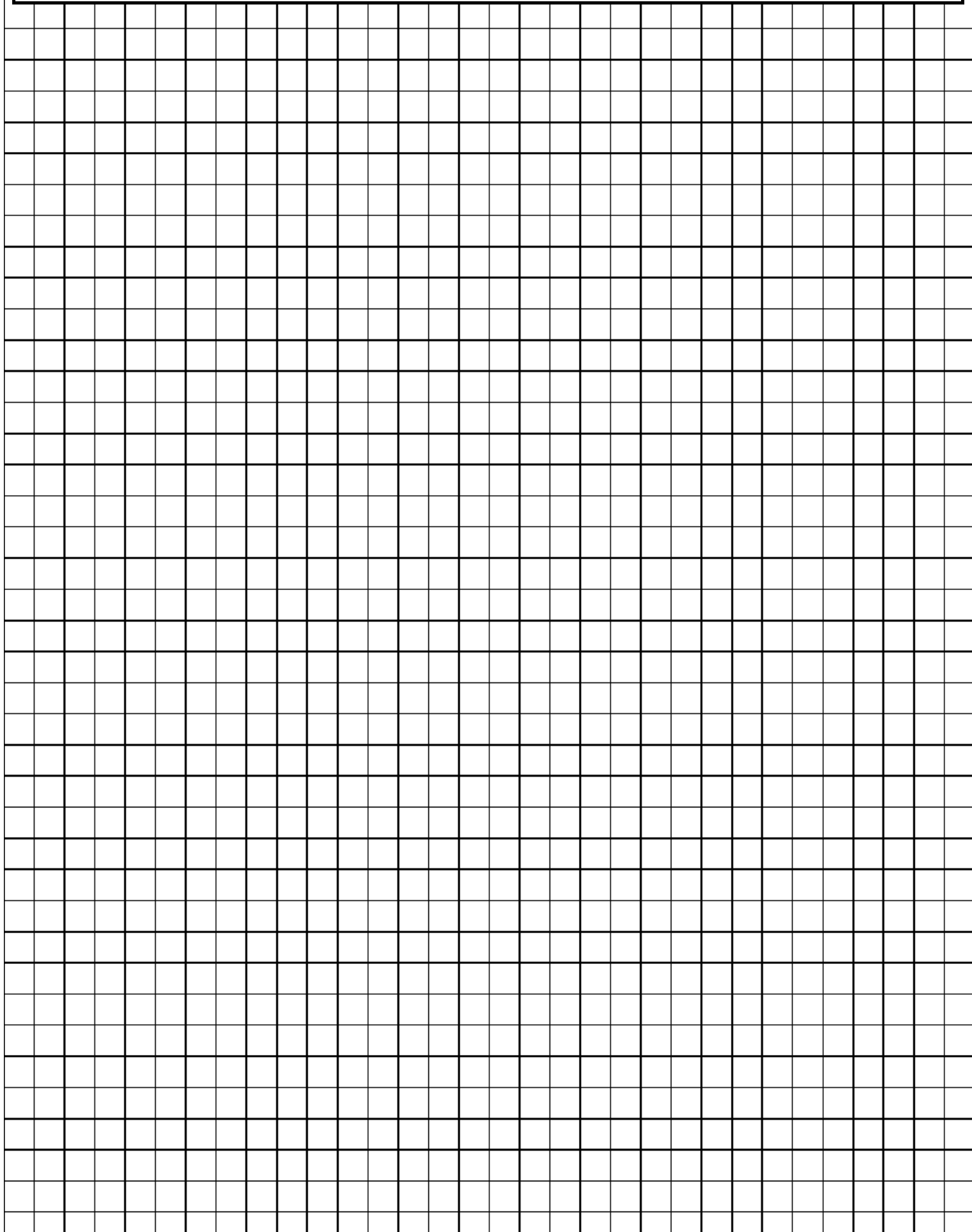
№ 1.

Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ выразите в градусах.



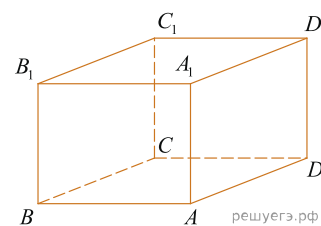
№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



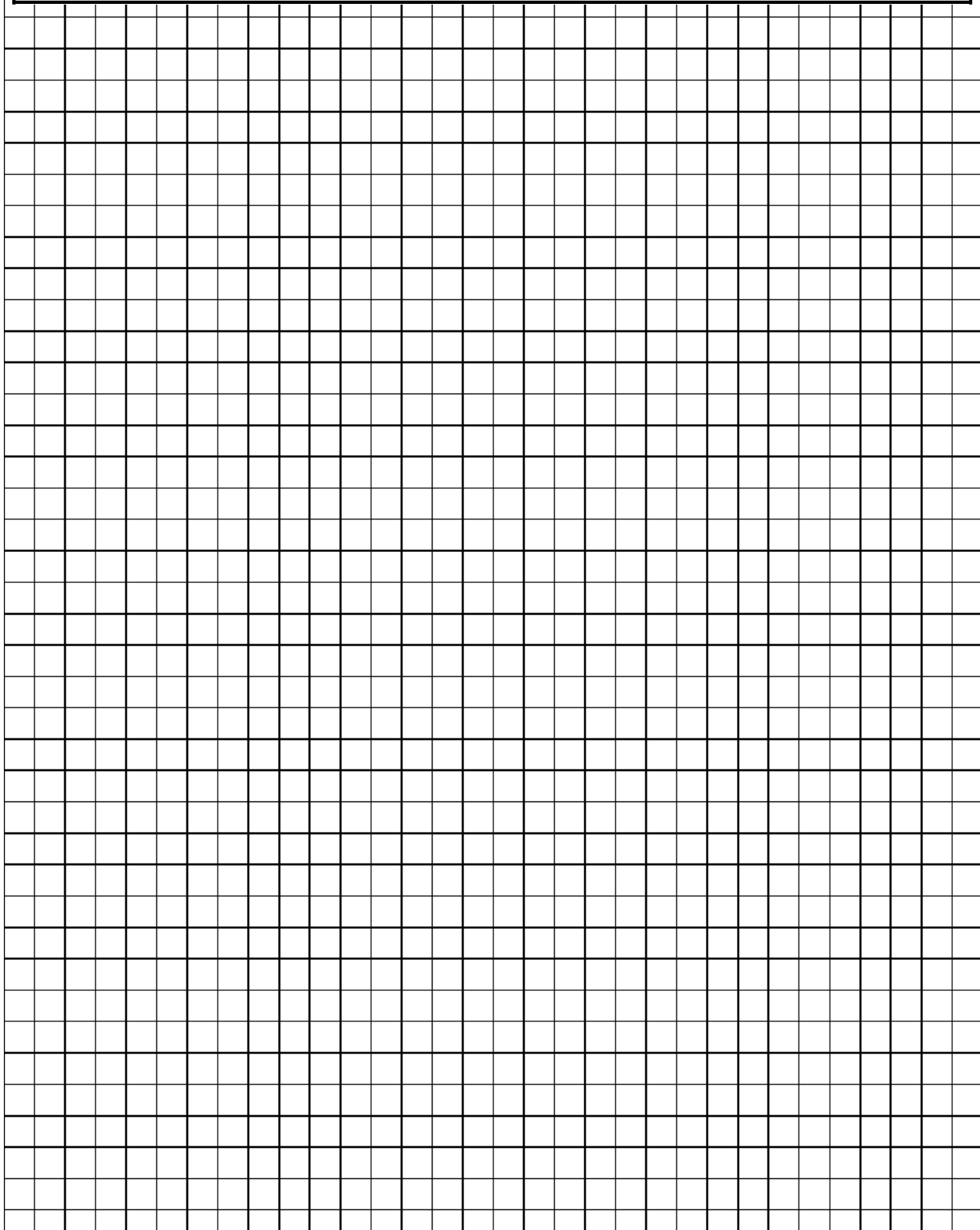
№ 3.

Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Дайте ответ в градусах.



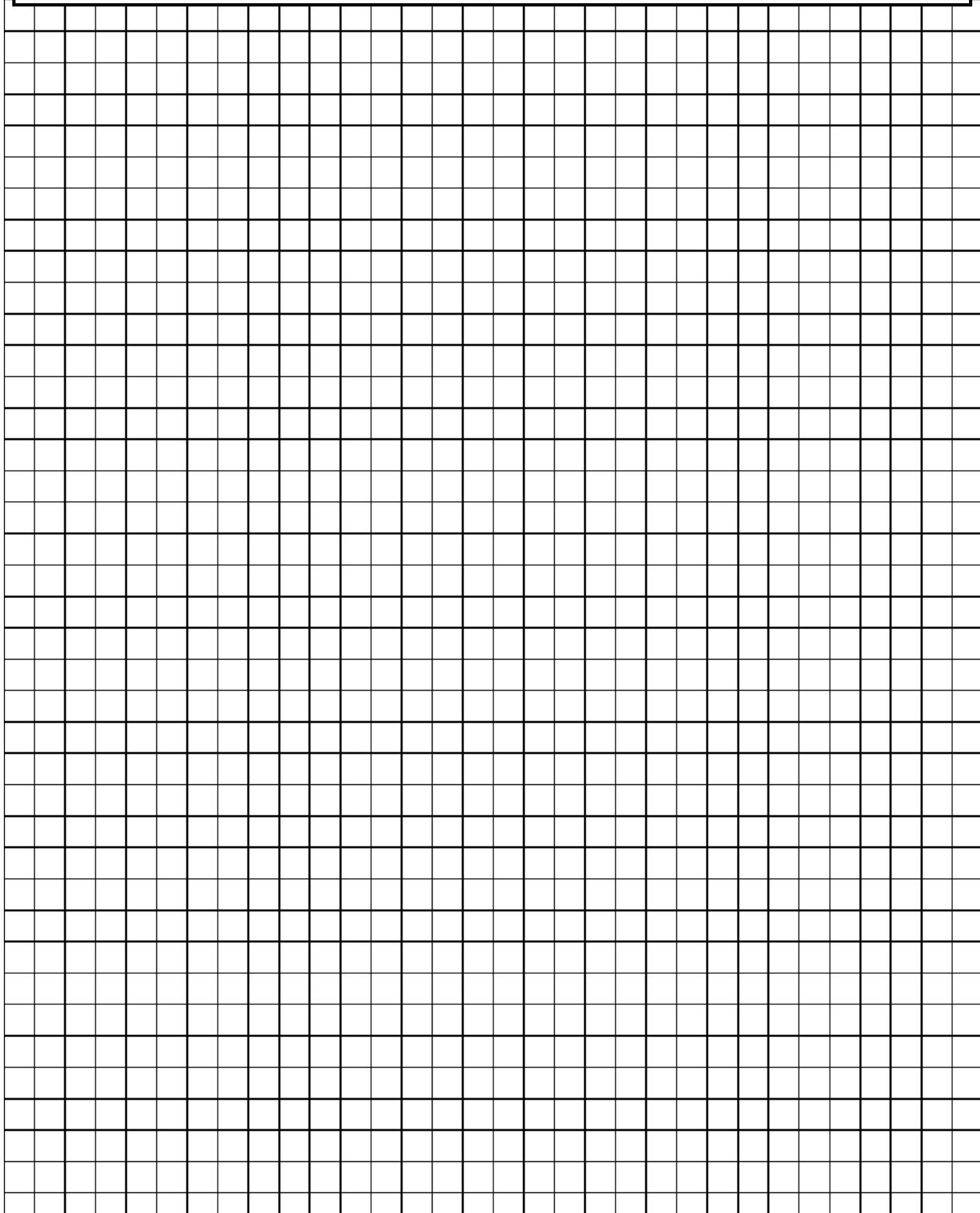
№ 4.

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?



№ 5.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.



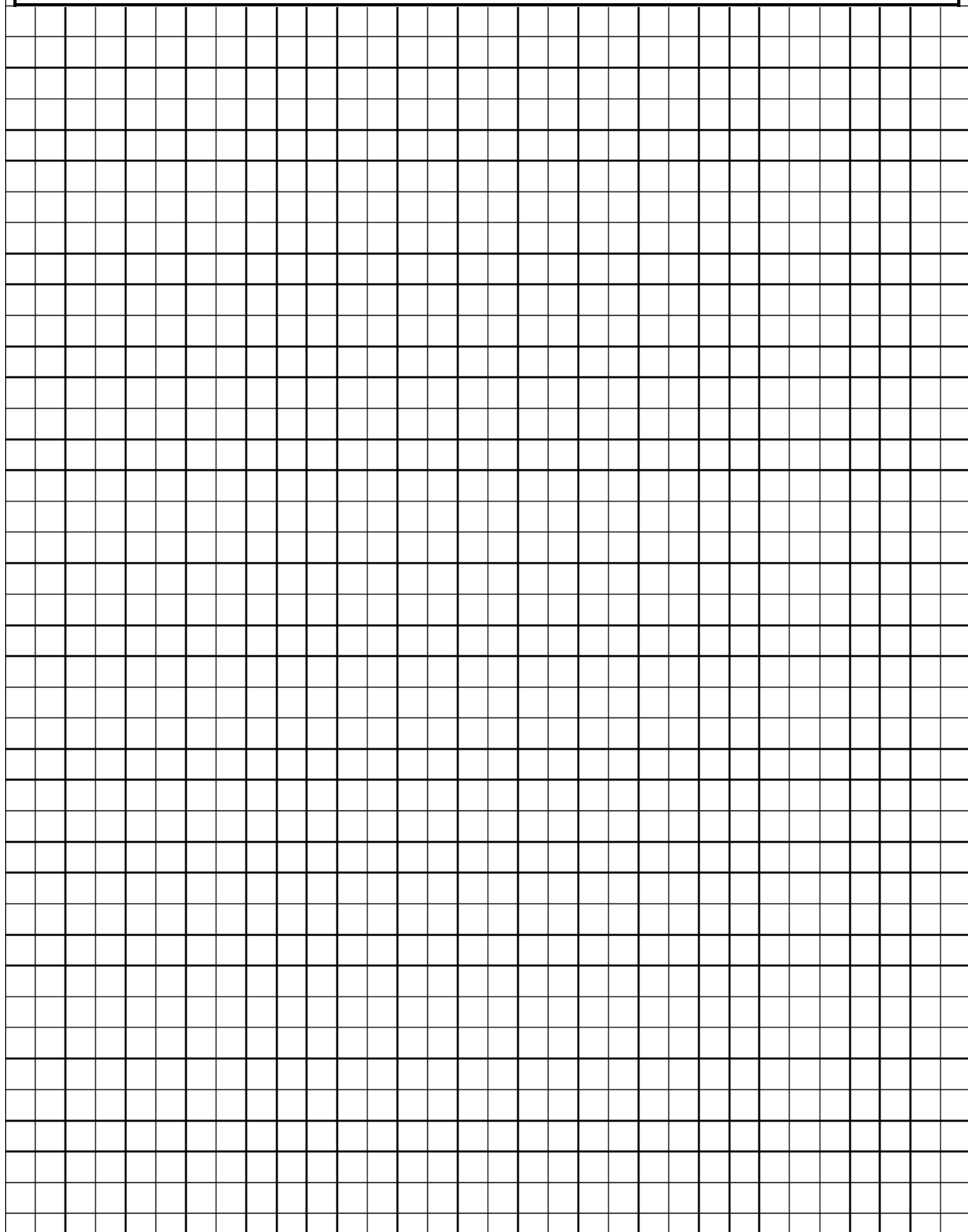
№ 6.

Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2 - 16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

[illegible]

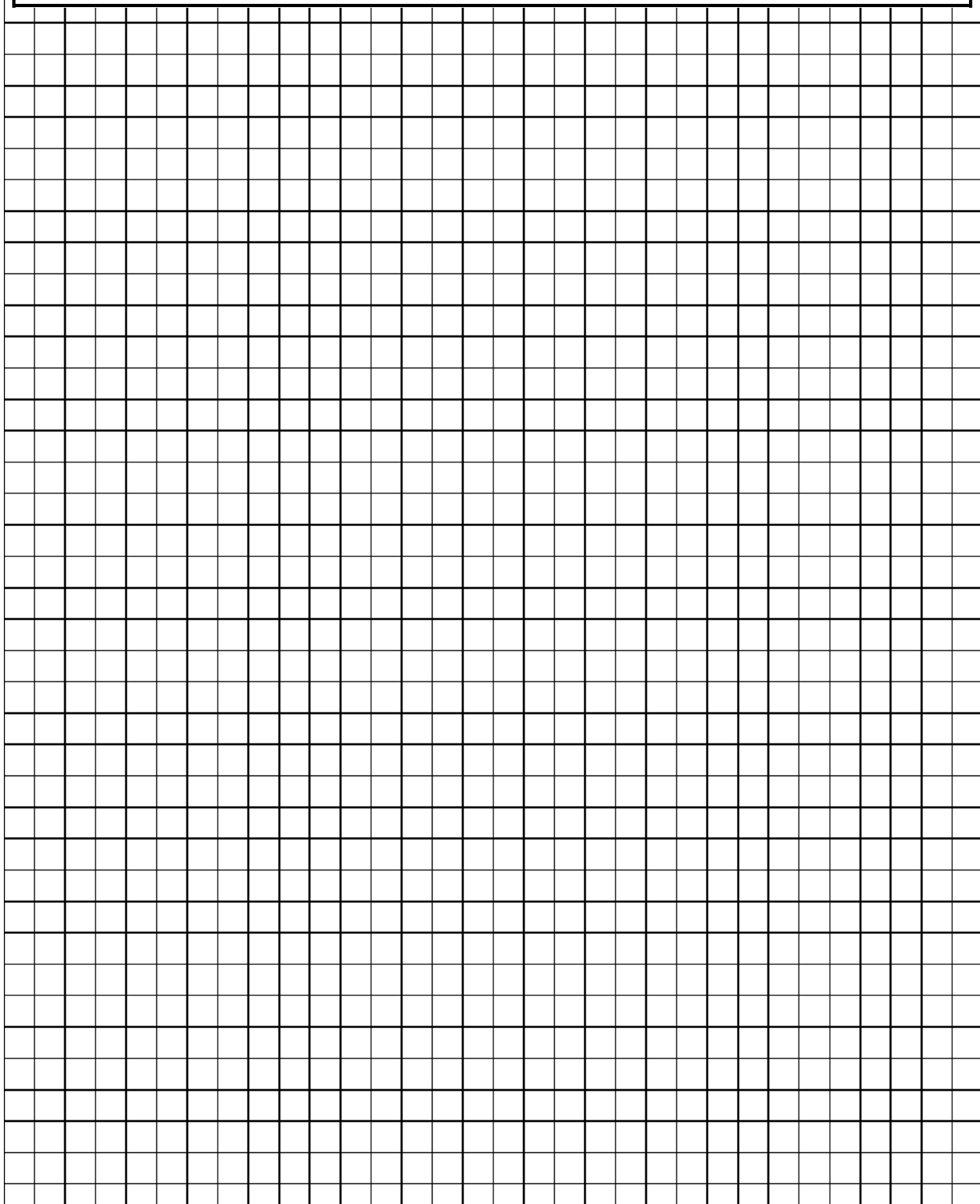
№ 7.

Найдите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.



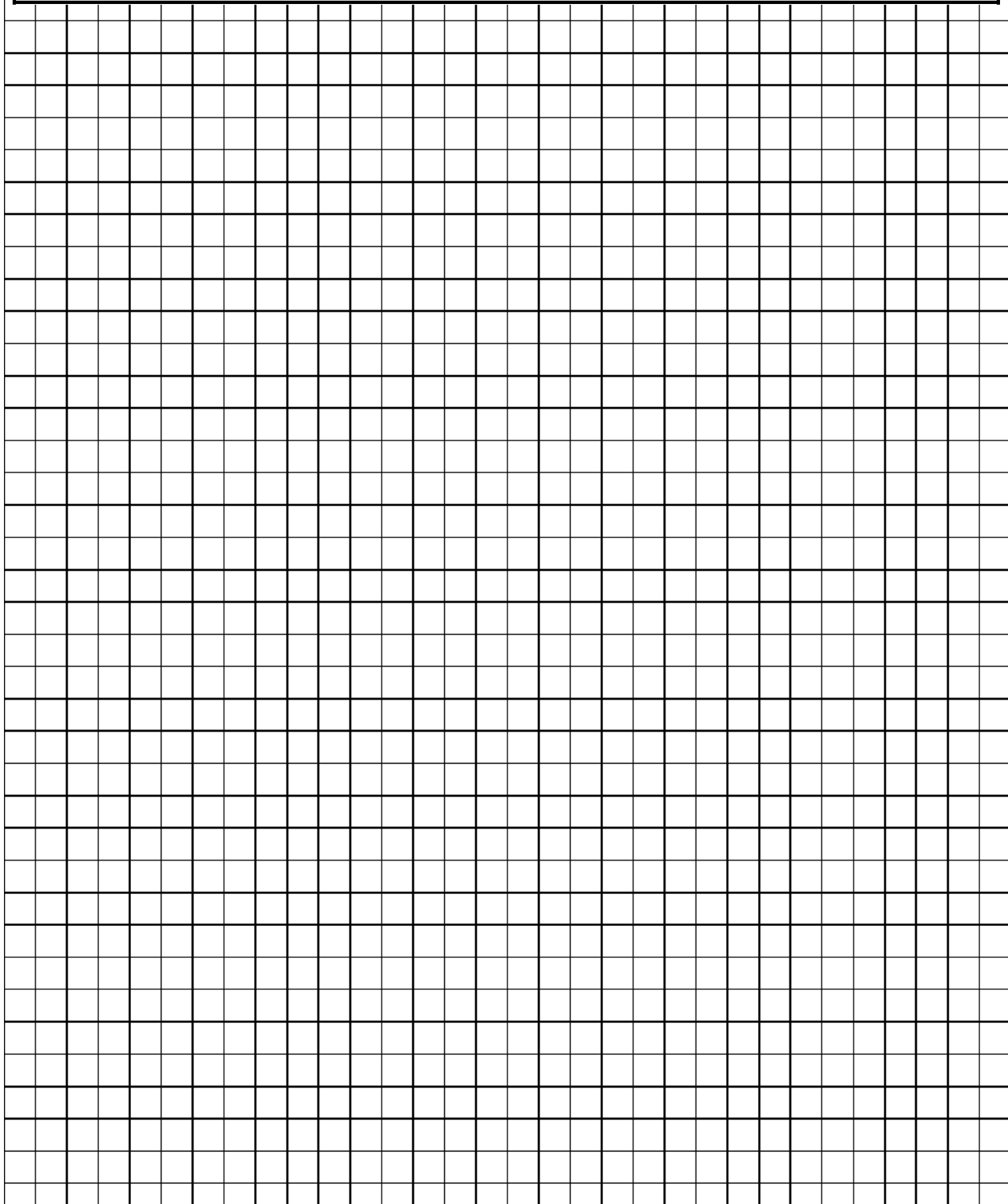
№ 8.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.



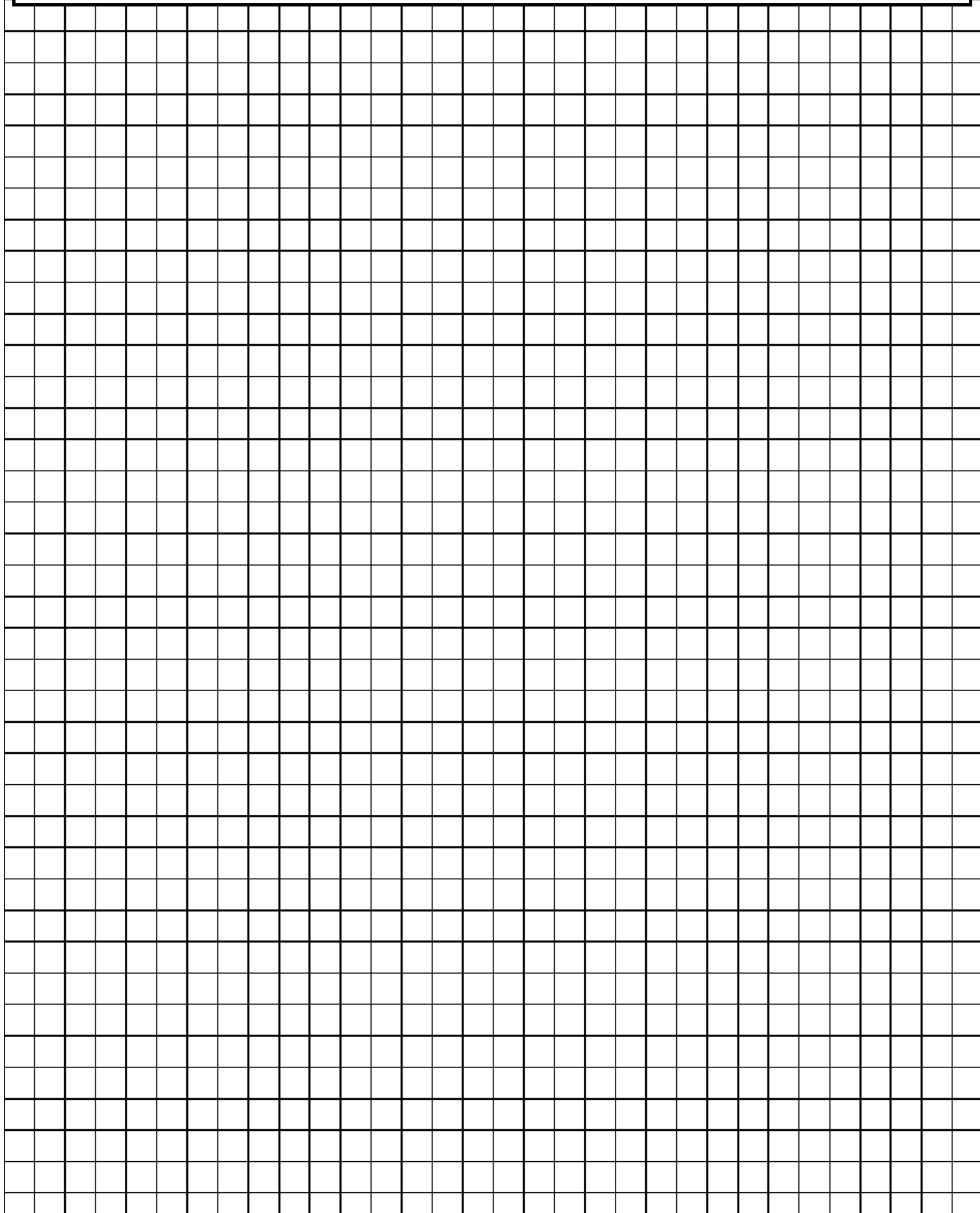
№ 9.

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?



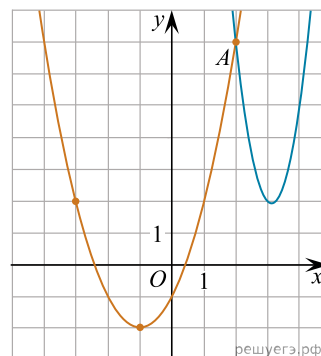
№ 10.

Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.



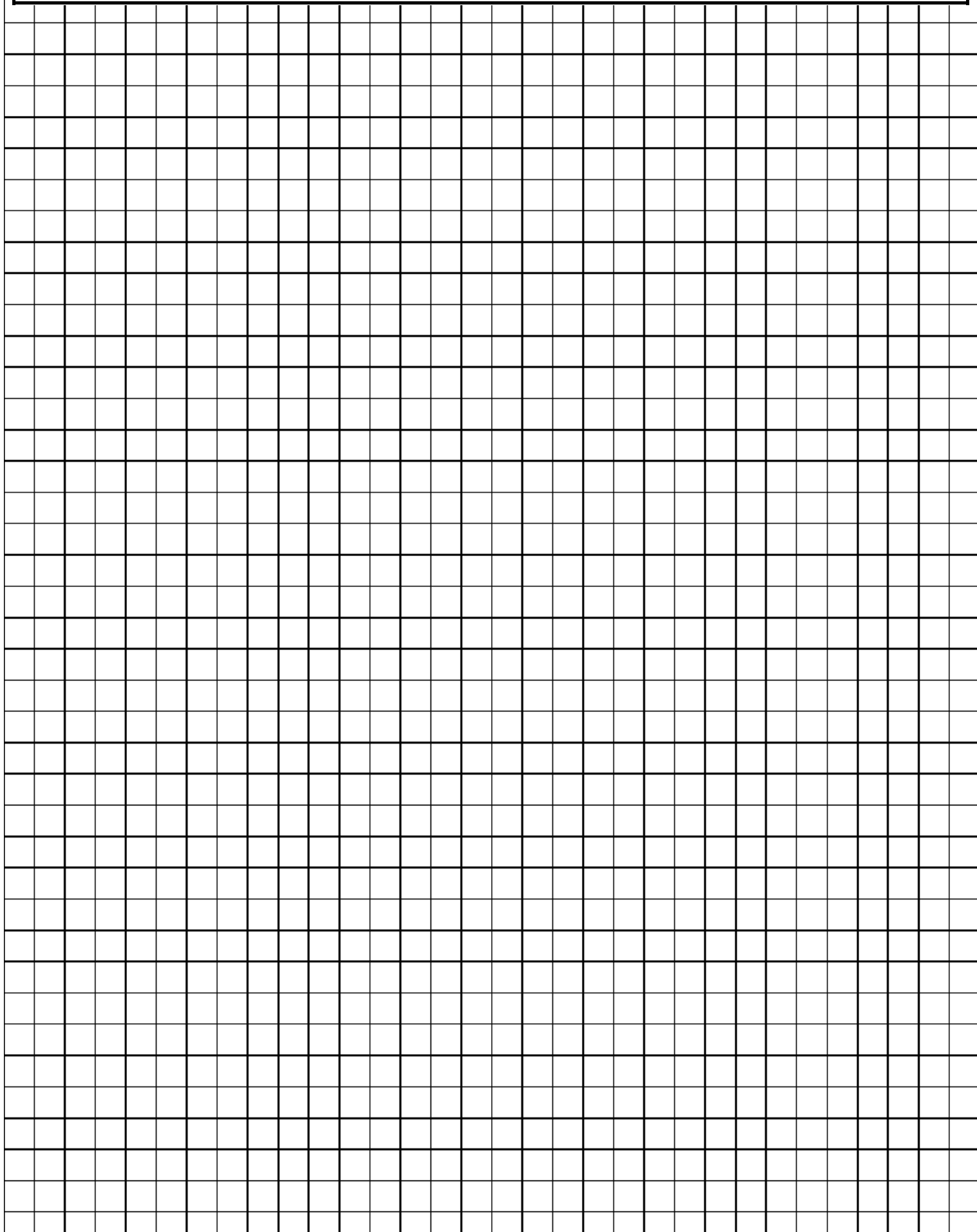
№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 12.

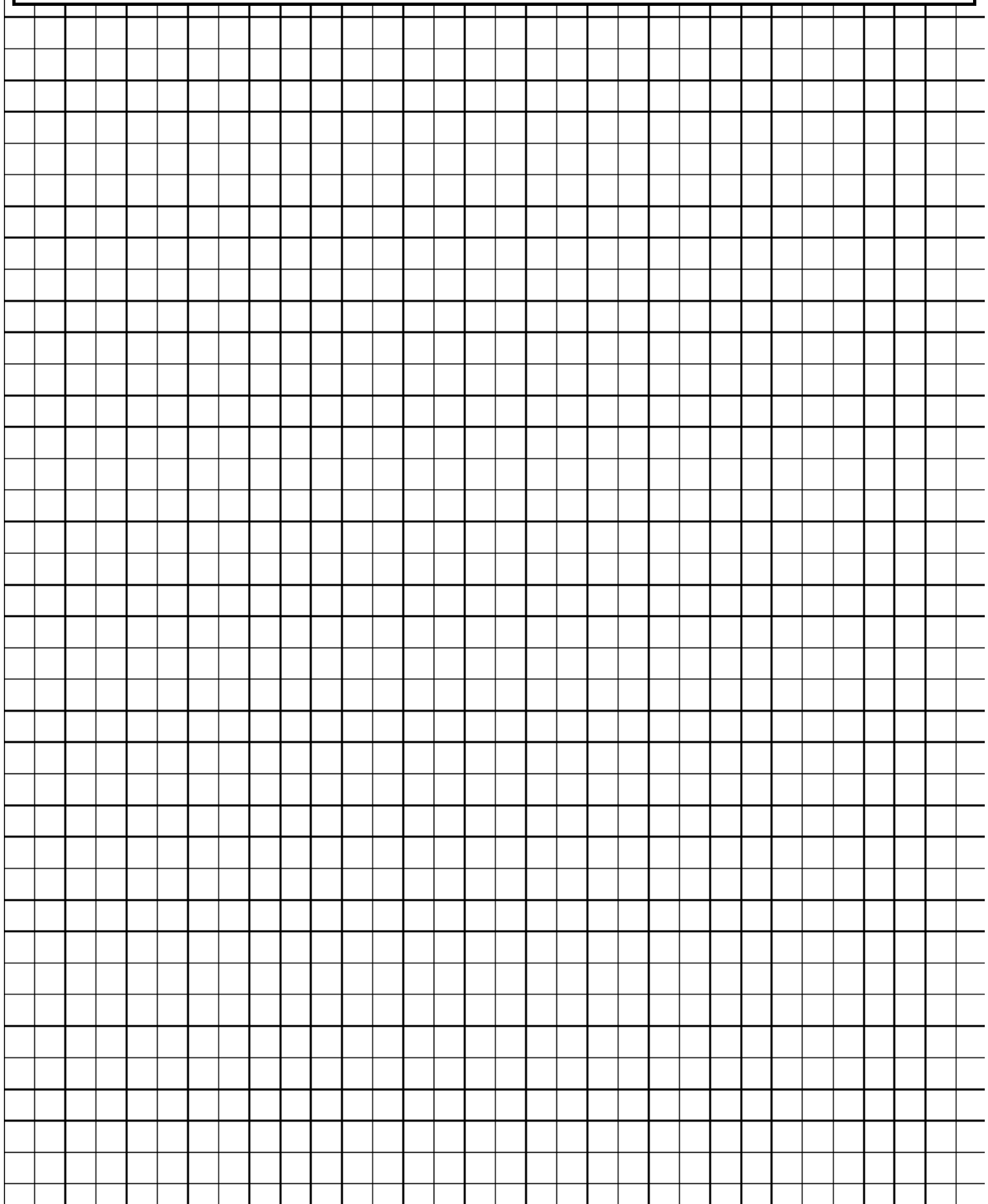
Найдите точку максимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.



№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{2\sin x + 1} = 0$.

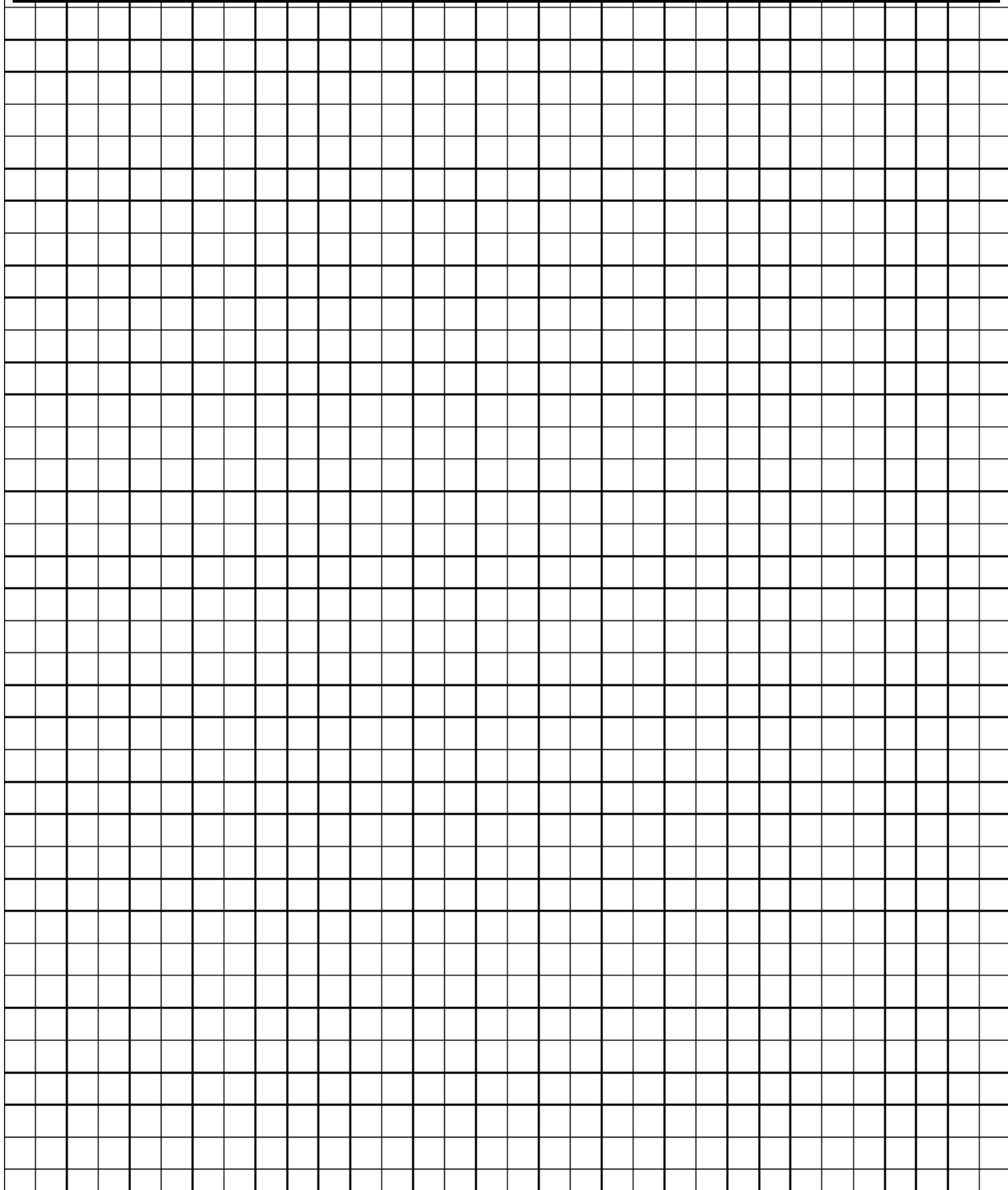
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



№ 14.

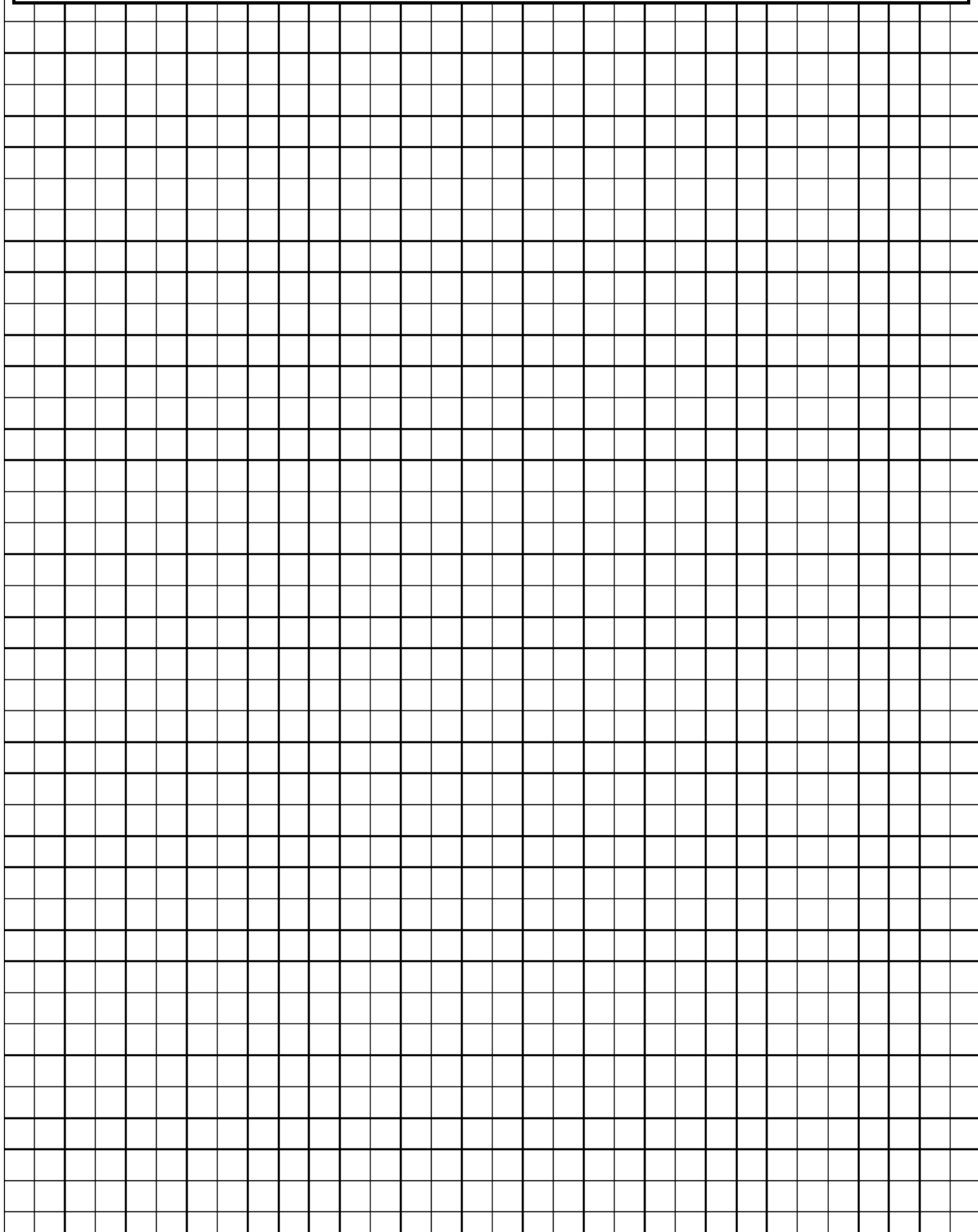
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды.

- а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .



№ 15.

Решите неравенство: $\frac{50 \cdot (3^x - 2 + 3^{-x})}{3^x + 2 + 3^{-x}} - \frac{20 \cdot 3^x + 20}{3^x + 1} \leq \frac{5 \cdot 3^{x+1} - 15}{3^x + 1}.$



№ 16.

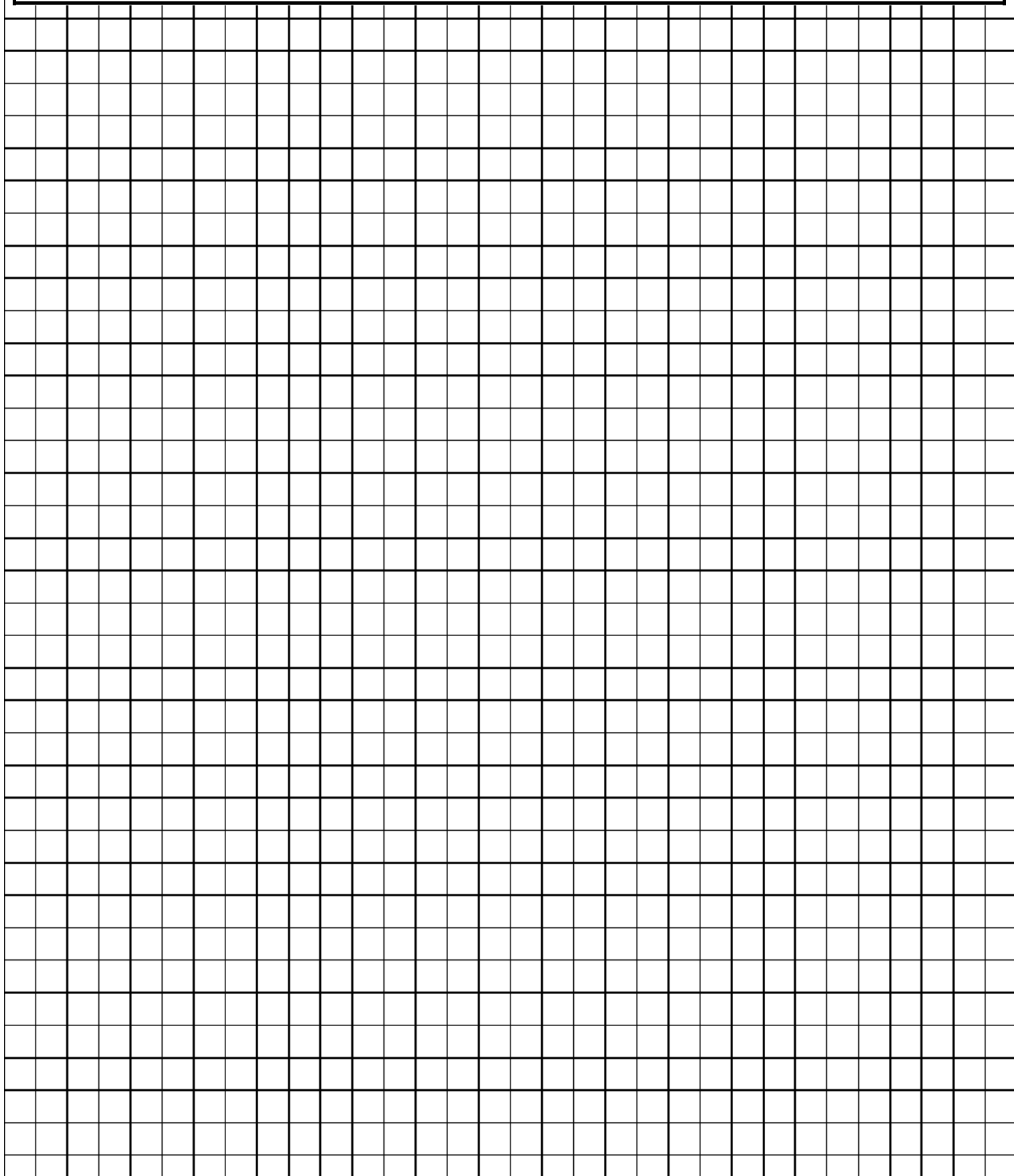
Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

№ 17.

На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отложены отрезки BP и AQ соответственно, причём $BP = AQ$, причём точки P и Q не являются серединами сторон AB и AC .

а) Докажите, что средняя линия треугольника ABC , параллельная его основанию BC , делит отрезок PQ пополам.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ , заключённого внутри вписанной окружности треугольника ABC , если $\angle A = 60^\circ$, $BP = 4$, а периметр треугольника ABC равен 18.

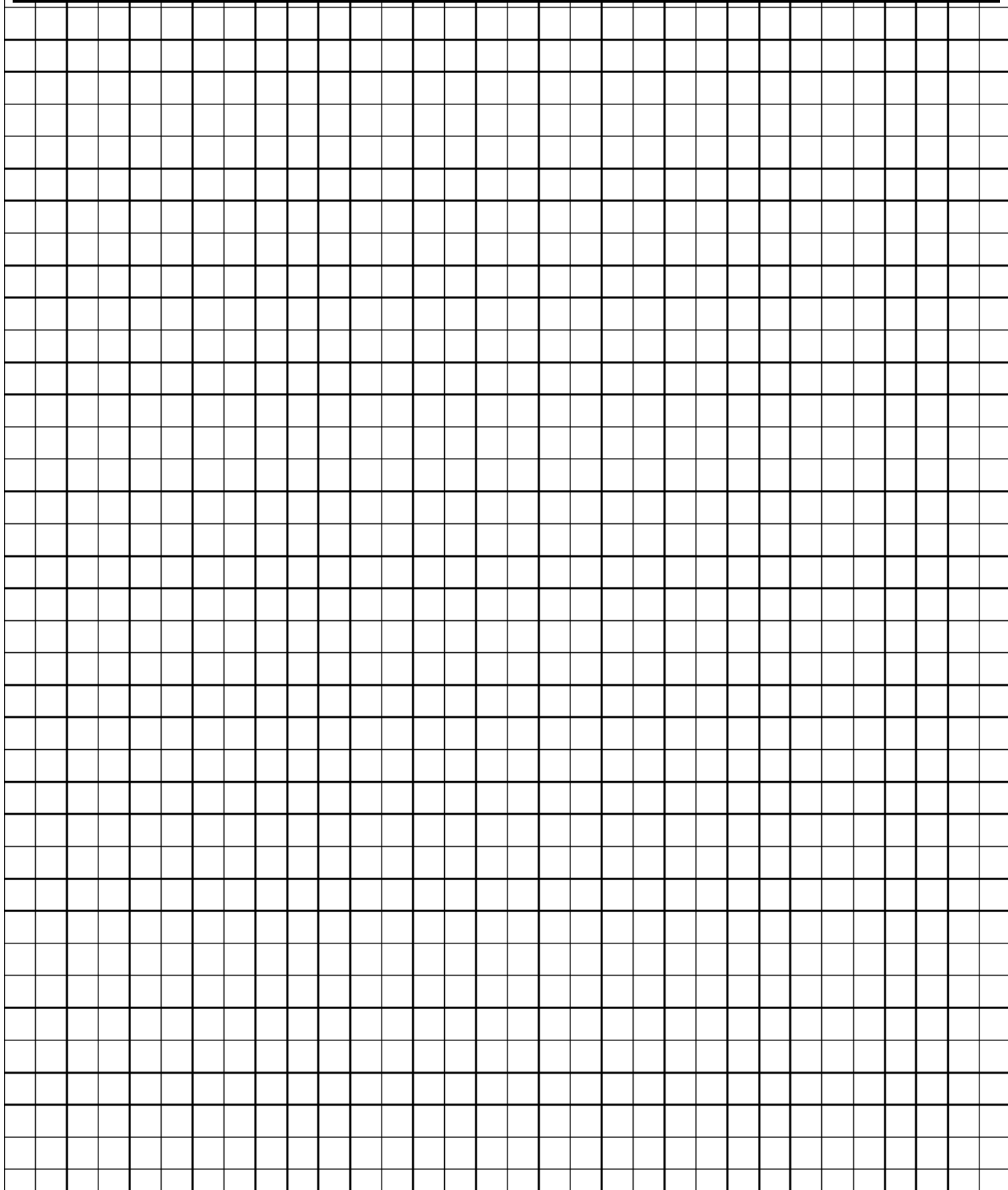


№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(7x + |x + a| - |6x|)^2 + (a + 1)(7x + |x + a| - |6x|) - a - 1 = 0$$

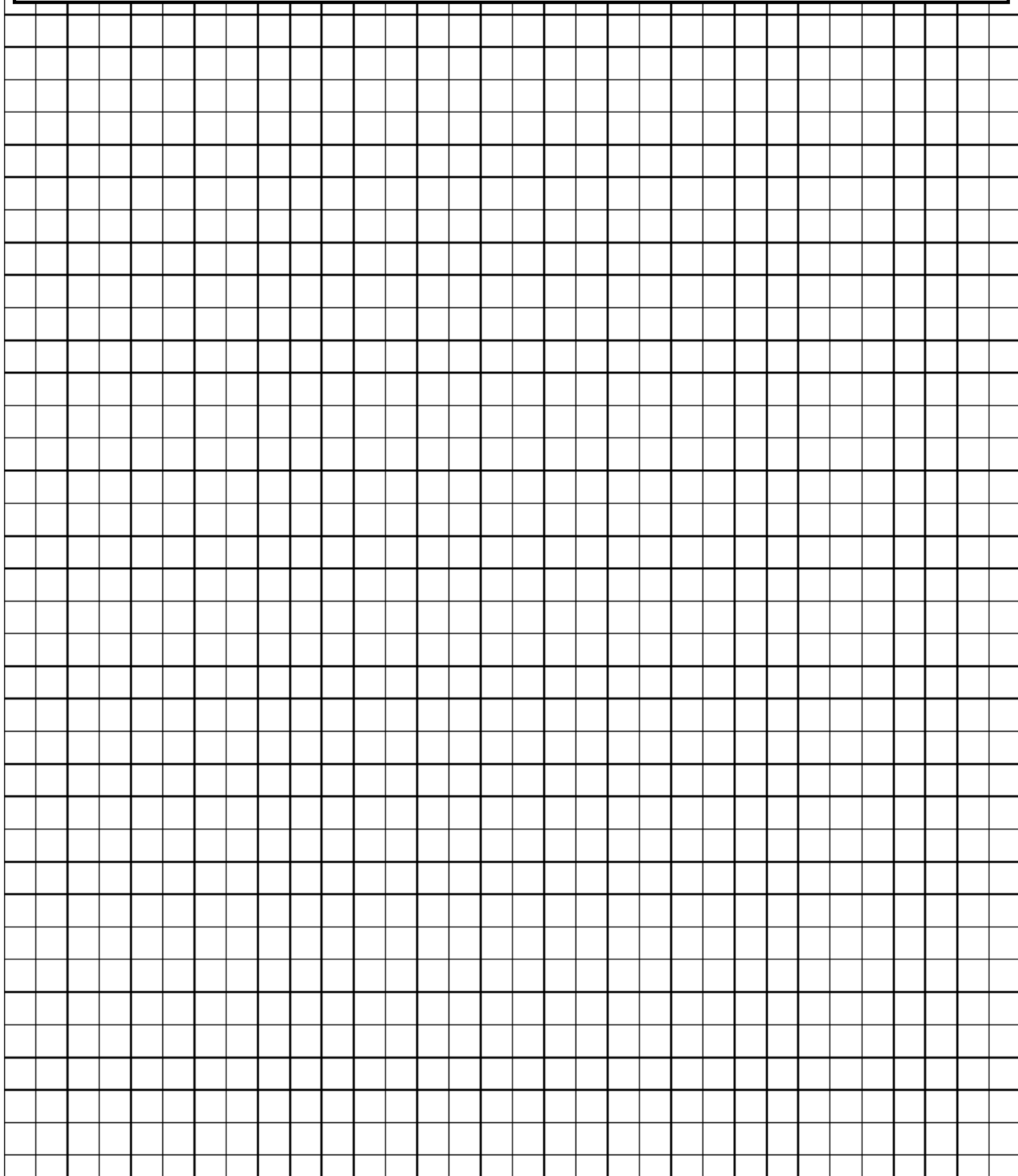
имеет ровно два различных корня.



№ 19.

Каждый из трёх бизнесменов имеет хотя бы одну акцию типа A и типа B . Общее количество акций обоих типов у каждого бизнесмена равны соответственно n , m и k . Стоимость акций типа A выше, чем стоимость акций типа B , а общая стоимость S (руб.) всех акций у каждого бизнесмена одинаковая.

- а) Может ли быть, что $n = 5$, $m = 21$, $k = 29$?
- б) Может ли быть, что $n = 4$, $m = 21$, $k = 29$?
- в) Найдите стоимость акции каждого типа, если $n = 11$, $m = 21$, $k = 29$, $S = 4402$.



Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27638	30
2	647124	28
3	245361	45
4	320178	0,5
5	319353	0,019
6	77366	5
7	525403	20
8	119975	60
9	28003	30
10	99569	11
11	509253	7
12	77443	-3

№ 13.

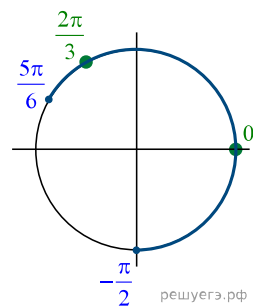
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение при условиях $\cos 3x \neq -1$, $\cos 3x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 3x}{1 + \cos 3x} = \cos 3x - 1 &\Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x = \cos^2 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \sin^2 3x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 3x(1 + \sin 3x \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ &\Leftrightarrow \sin 3x(1 + \sin 3x \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ограничениям соответствует только $3x = 2\pi k$, откуда $x = \frac{2\pi k}{3}$.

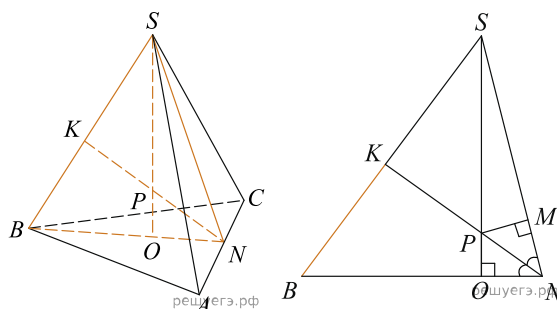
б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности. Подходят корни 0 и $\frac{2\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) 0, $\frac{2\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Точка O принадлежит отрезку BN , значит, точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Значит, прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K . Треугольник SNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$. Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$. Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK , то искомое расстояние равно длине отрезка BK . NK является медианой треугольника SNB , поэтому $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

Приведем решение а) Ивана Иванова из Владивостока.

Данная треугольная пирамида правильная, поэтому точки B, S, N, O и P лежат в одной плоскости. Значит, прямая PN пересекает ребро BS в некоторой точке K . Рассмотрим треугольник BSO и прямую KN , пересекающую сторону SO этого треугольника в точке P . По теореме Менелая: $\frac{BN}{NO} \cdot \frac{OP}{SP} \cdot \frac{SK}{BK} = 1$. Поскольку $BN:NO=3$ (по теореме о точке пересечения медиан), а $\frac{OP}{SP} = \frac{1}{3}$ (по условию), заключаем, что $\frac{SK}{BK} = 1$, то есть $SK = BK$. Значит, отрезок NK —

медиана треугольника BNS . Этот треугольник является равнобедренным, поскольку $BN = SN$ как соответственные медианы равных треугольников. Следовательно, отрезок NK является также и высотой треугольника BNS . Точки N , P и K лежат на одной прямой, а потому прямая NP перпендикулярна прямой BS .

Приведем еще одно решение пункта а).

Пусть a — длина ребра пирамиды. Тогда

$$BN = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$NO = \frac{1}{3}BN = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$BO = \frac{2}{3}BN = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$PO = \frac{1}{4}SO = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Точка O принадлежит отрезку BN , значит, точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Поэтому прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K . Из треугольника NOP получим

$$\operatorname{tg} ONP = \frac{OP}{ON} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Из треугольника } SOB \text{ получим } \operatorname{ctg} OBS = \frac{OB}{OS} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Тогда в треугольнике } KNB$$

$$\operatorname{tg} KNB = \operatorname{tg} ONP = \operatorname{ctg} OBS = \operatorname{ctg} KBN,$$

следовательно, $\angle KNB + \angle KBN = 90^\circ$. Тогда угол NKB равен 90° , то есть прямые NP и BS перпендикулярны.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 3^x$, тогда $t > 0$. Получаем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{50t(t-1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{20(t+1)}{t+1} \leq \frac{15(t+1)-30}{(t+1)} \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 20 \leq 15 - \frac{30}{(t+1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 35 + \frac{30}{(t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow 50(t-1)^2 - 35(t+1)^2 + 30(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 15t^2 - 140t + 45 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 9. \frac{50t(t-1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{20(t+1)}{t+1} \leq \frac{15(t+1)-30}{(t+1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 20 \leq 15 - \frac{30}{(t+1)} \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 35 + \frac{30}{(t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 50(t-1)^2 - 35(t+1)^2 + 30(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 15t^2 - 140t + 45 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 9. \frac{50t(t-1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{20(t+1)}{t+1} \leq \frac{15(t+1)-30}{(t+1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 20 \leq 15 - \frac{30}{(t+1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 35 + \frac{30}{(t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow_{t>0} 50(t-1)^2 - 35(t+1)^2 + 30(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 15t^2 - 140t + 45 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 9. \frac{50t(t-1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{20(t+1)}{t+1} \leq \frac{15(t+1)-30}{(t+1)} \Leftrightarrow_{t>0} \\
& \Leftrightarrow_{t>0} \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 20 \leq 15 - \frac{30}{(t+1)} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{50(t-1)^2}{(t+1)^2} - 35 + \frac{30}{(t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow_{t>0} \\
& \Leftrightarrow_{t>0} 50(t-1)^2 - 35(t+1)^2 + 30(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 15t^2 - 140t + 45 \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 9.
\end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $[-1; 2]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Обозначим размер кредита за S млн рублей. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает по $0,2S$. Всего $0,4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастет до $1,2S$. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1,2S - x$, в середине 4-го года он равен $1,2(1,2S - x)$. В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S - x)$ и по условию равна x .

Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{36S}{55},$$

и общий размер выплат равен

$$0,4S + 2 \cdot \frac{36S}{55} = \frac{94S}{55}.$$

По условию

$$\frac{94S}{55} > 8 \Leftrightarrow 94S > 440 \Leftrightarrow S > 4\frac{32}{47}.$$

Наименьшее целое $S = 5$.

Ответ: 5 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем через точку A прямую l , параллельную основанию BC . Отрезки AQ и BP равны и составляют равные углы с прямыми l и BC соответственно. Следовательно, точки Q и P равноудалены от прямых l и BC соответственно, а потому равноудалены и от прямой MN — прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC .

Пусть прямые PQ и MN пересекаются в точке K . Проведем высоты PH_1 и QH_2 соответственно на прямую MN , полученные отрезки равны. Углы PKM и QKN равны как вертикальные, поэтому прямоугольные треугольники PKH_1 и QKH_2 равны по катету и острому углу, откуда $PK = QK$.

б) Пусть прямая PQ пересекает вписанную окружность в точках T и R (см. рис.). Из условия следует, что треугольник ABC — равнобедренный с углом 60° , то есть равносторонний. Следовательно,

$$AB = AC = BC = 6,$$

$$AM = MB = CN = AN = 3,$$

$$QN = PM = BP - MB = 1.$$

Пусть $RT = x$. Произведение длины секущей на длину ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной, если секущая и касательная проведены из одной точки. Отсюда получаем:

$$PT \cdot PR = PM^2 \Leftrightarrow PT \cdot (PT + x) = 1,$$

$$QR \cdot QT = QN^2 \Leftrightarrow QR \cdot (QR + x) = 1,$$

то есть $QR = PT$. По теореме косинусов для треугольника APQ находим:

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos \angle PAQ} = \\ &= \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos \angle PAQ} = \\ &= \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{20 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

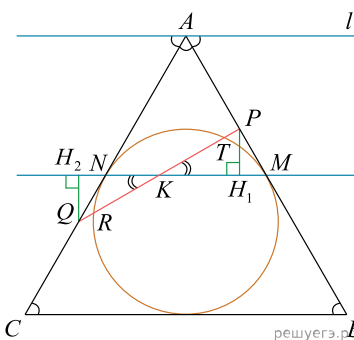
а потому

$$PT + QR = PQ - RT \Leftrightarrow 2PT = 2\sqrt{3} - x \Leftrightarrow PT = \frac{2\sqrt{3} - x}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{3} - x}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3} - x}{2} + x \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3} - x}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3} + x}{2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12 - x^2 &= 4 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}. \quad \frac{2\sqrt{3} - x}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3} - x}{2} + x \right) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3} - x}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3} + x}{2} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12 - x^2 &= 4 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $2\sqrt{2}$.



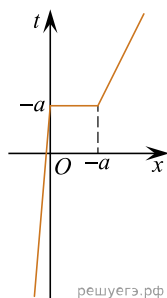
№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

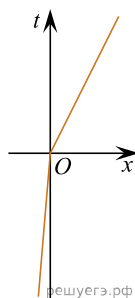
Решение. Пусть $t = 7x + |x + a| - |6x|$, тогда

$$t^2 + (a + 1)t - a - 1 = 0. \quad (*)$$

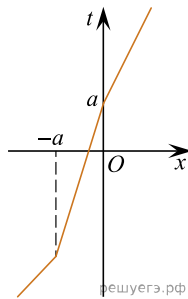
Проанализируем сделанную замену. Рассмотрим функцию $f(x) = 7x + |x + a| - |6x|$. При $a < 0$ функция f возрастает на $(-\infty; 0) \cup (-a; +\infty)$, а на $[0; -a]$ она постоянна: $t = -a$. При $a \geq 0$ при любом раскрытии модулей функция f возрастает.



$a < 0$



$a = 0$



$$a > 0$$

Чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, необходимо и достаточно чтобы уравнение(*) при $a \geq 0$ имело два различных корня ($D > 0$), а при $a < 0$ имело два различных корня, ни один из которых не равен $-a$. То есть выполнялась система

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} &(a+1)^2 - 4 \cdot (-a-1) > 0, \\ &\begin{cases} a \geq 0, \\ a < 0, \end{cases} \\ &(-a)^2 + (a+1) \cdot (-a) - a - 1 \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a + 5 > 0, \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ a < 0, \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < -5, \\ a > -1, \end{cases} \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \left\{ \begin{aligned} &(a+1)^2 - 4 \cdot (-a-1) > 0, \\ &\begin{cases} a \geq 0, \\ a < 0, \end{cases} \\ &(-a)^2 + (a+1) \cdot (-a) - a - 1 \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a + 5 > 0, \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ a < 0, \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < -5, \\ a > -1, \end{cases} \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -5) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть акция типа A стоит 9 рублей, а акция типа B — 1 рубль, и пусть у первого бизнесмена 4 акции типа A и 1 типа B , у второго — 2 типа A и 19 типа B , а у третьего — 1 типа A и 2 типа B . Тогда у каждого из них акций на 37 рублей.

б) У первого бизнесмена должны быть три акции типа A и одна типа B . В самом деле, у остальных не может быть даже 4 акций типа A , ведь иначе стоимость их активов будет больше. Значит, у них не менее 18 и 26 акций типа B соответственно. Значит, число акций типа A у каждого из них меньше, чем у предыдущего — если обоих типов акций было бы больше, то и стоимость активов была бы больше. Следовательно, у второго бизнесмена две акции типа A , а у третьего — одна. Тогда из сравнения первых двоих получаем, что акция типа A должна стоить как 17 акций типа B , а из сравнения последних двоих — как 9. Получено противоречие.

в) Ясно, что у первого не более 10 акций каждого типа. Значит, акций типа A у первого больше, чем у второго, поскольку иначе после выкидывания равного числа акций у первого останется несколько акций типа B , а у второго не меньше того же числа акций типа A и сколько-то акций типа B , и стоимость его активов будет больше. Аналогично у третьего их меньше, чем у второго. Будем заменять акции первого типа на акции второго, следя за общей ценой.

Пусть акция типа A стоит как $x+1$ акция типа B (возможно, что x нецелое). При замене одной акции типа A на

$x + 1$ акцию типа B количество акций растёт на x . Так как у второго на 10 акций больше, чем у первого, то $\frac{10}{x}$ — целое число. Аналогично $\frac{8}{x}$ — целое, откуда и $\frac{2}{x}$ — целое. При этом $9 \cdot \frac{2}{x} = \frac{18}{x} \leq 9$, поскольку разница в числе акций типа A третьего и первого бизнесменов не может превышать 9. Поэтому $\frac{2}{x} = 1$, откуда $x = 2$, разница в количестве акций типа A у первого и третьего равна 9, цена акции типа A втрое больше цены акции типа B . У первого 10 акций типа A и 1 типа B , у второго — 5 типа A и 16 типа B , у третьего — 1 типа A и 28 типа B . Стоит любой такой набор как 31 акция типа B , откуда цена одной такой акции $\frac{4402}{31} = 142$, цена акции типа A равна $142 \cdot 3 = 426$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 426.
