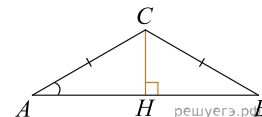


Вариант 91

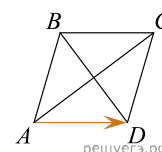
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AD}$.



№ 3.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DD_1 = 1$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину диагонали CA_1 .

№ 4.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

№ 5.

Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определён жребием. Всего в турнире участвует 16 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга— Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

№ 6.

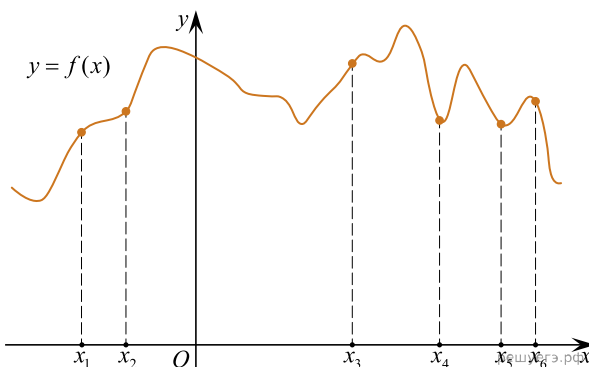
Найдите корень уравнения $\log_5(4+x) = 2$.

№ 7.

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 17 \cos \alpha} = 3$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



Сколько из отмеченных точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

№ 9.

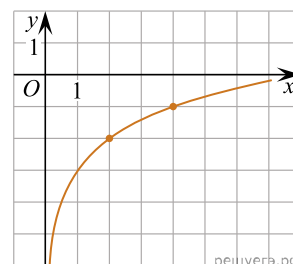
Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па)— давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 25 раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 5 раз?

№ 10.

Первые 190км автомобиль ехал со скоростью 50км/ч, следующие 180км— со скоростью 90км/ч, а затем 170км— со скоростью 100км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 1$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7 \sin x - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

№ 13.

- Решите уравнение $|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x - 3}| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x - 3}|$.
- Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

№ 14.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S каждое ребро равно $5\sqrt[4]{2}$. Через середины сторон AD и DC и середину высоты пирамиды проведена плоскость α .

- Докажите, что плоскость α параллельна ребру SD .
 - Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α .
-

№ 15.

Решите неравенство $4 \cdot 3^{\log_3^2(x-2)} - 9 \geq 4 \cdot 3^{2\log_3^2(x-2)} - 11 \cdot (x-2)^{\log_3(x-2)}$.

№ 16.

У инвестора есть 50 миллионов рублей. Часть денег он планирует вложить в проект. Если он вложит в проект $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., то по завершении проекта он получит x млн руб. Невложенные в проект деньги инвестор планирует разместить на банковском счете. По завершении проекта инвестор получит из банка сумму, увеличенную на 20%.

Инвестор собирается распределить деньги так, чтобы общая сумма полученных им денег от вложения в проект и размещения в банке оказалась наибольшей. Прибыль от проекта— это разность между полученной от проекта и вложенной в проект суммами денег. Найдите, сколько процентов составит прибыль от проекта от вложенной в него суммы денег.

№ 17.

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет больше двух корней.

№ 19.

Владелица супермаркета «Новогоднее счастье от Алевтины» организовала распродажу новогодних сувениров. В течение дня покупатели приходили к кассиру, чтобы расплатиться (сумма любого платежа— четное число рублей). Каждый протягивал купюру 5000 рублей, а кассир выдавал сдачу, имея только 300 монет по 10 рублей и 500 монет по 2 рубля. По итогам дня все монеты оказались потраченными на сдачу.

- Могло ли за день быть 250 покупателей, если все они получили равную сдачу?
 - Каким могло быть наибольшее число покупателей, если каждый получил одинаковую сдачу?
 - Для какого наибольшего числа покупателей кассир мог выдать на сдачу все монеты при любом распределении сдач, не противоречащим условию?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27286	8
2	27713	10
3	284363	3
4	621760	0,6
5	508870	0,125
6	26647	21
7	26790	8
8	647130	3
9	42849	0,5
10	99607	72
11	509026	16
12	26697	9

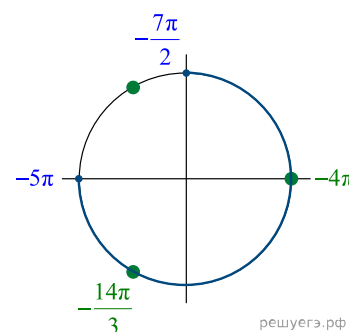
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - 2 = 0.$$

Пусть $y = \frac{1}{\cos x}$. Получаем $y^2 + y - 2 = 0$, следовательно, $y=1$ или $y=-2$. Значит, $\frac{1}{\cos x} = 1$, то есть $\cos x = 1$, откуда следует, что $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\frac{1}{\cos x} = -2$, то есть $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}]$. Получаем: $-\frac{14\pi}{3}$; -4π .

Ответ: а) $\left\{ 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m : k, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$; -4π .

№ 14.

--

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точки M и N — середины сторон AD и DC соответственно, точка O — центр основания, точка T — середина высоты пирамиды SO . Отрезок MN — средняя линия равнобедренного прямоугольного треугольника ACD — пересекает его высоту, биссектрису и медиану DO в ее середине — точке E . Заметим, что отрезок MN лежит в плоскости α , следовательно, точка E и вместе с ней отрезок ET также лежит в плоскости α . Очевидно, что отрезок ET — средняя линия треугольника SOD , следовательно, прямые ET и SD параллельны, значит, плоскость α параллельна ребру SD .

б) Плоскость α пересекает основание $ABCD$ по прямой MN , параллельной диагонали AC , поэтому плоскость α пересекает плоскость SAC по прямой, параллельной диагонали AC и проходящей через точку T , то есть по средней линии треугольника SAD .

Пусть точки R и P — середины ребер SA и SD соответственно, тогда RP — указанная выше прямая пересечения. Прямая ET лежит в плоскости SBD , пусть Q — точка ее пересечения с SB . Таким образом, сечением пирамиды плоскостью α является пятиугольник $MNPQR$.

Заметим, что по теореме о трех перпендикулярах отрезки TE и MN перпендикулярны, поскольку отрезок OD перпендикулярен диагонали AC , следовательно, четырехугольник $MNPR$ — прямоугольник, а отрезок QT — высота треугольника PQR . Нетрудно заметить, что треугольники ABD , SAC и SBD — равные (по трем сторонам) прямоугольные равнобедренные треугольники. Кроме того, треугольники SBD , SOD , OET и STQ подобны, а значит, все прямоугольные равнобедренные.

Зная, что $AC = AD\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, получаем:

$$MN = PR = AO = CO = BO = DO = SO = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$OE = ED = OT = TS = \frac{1}{2}OD = \frac{5}{4}\sqrt{2},$$

$$ET = OE\sqrt{2} = \frac{5}{2}, \quad QT = \frac{1}{\sqrt{2}}TS = \frac{5}{4}\sqrt{2}.$$

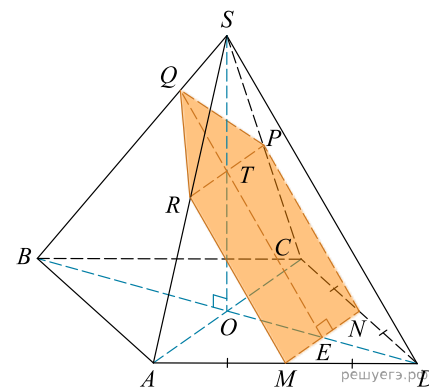
Таким образом,

$$S_{MNPR} = MN \cdot ET = \frac{25}{2}, \quad S_{PQR} = \frac{1}{2}PR \cdot QT = \frac{25}{8},$$

откуда

$$S_{MNPQR} = S_{MNPR} + S_{PQR} = \frac{125}{8}.$$

Ответ: б) $\frac{125}{8}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Заметим, что

$$3^{\log_3^2(x-2)} = 3^{\log_3(x-2) \cdot \log_3(x-2)} = \left(3^{\log_3(x-2)}\right)^{\log_3(x-2)} = (x-2)^{\log_3(x-2)},$$

и введём замену переменной $t = (x-2)^{\log_3(x-2)}$. Тогда

$$4t - 9 \geq 4t^2 - 11t \Leftrightarrow 4t^2 - 15t + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (t-3)(4t-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq t \leq 3. \quad 4t - 9 \geq 4t^2 - 11t \Leftrightarrow 4t^2 - 15t + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t-3)(4t-3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq t \leq 3.$$

Вернёмся к исходной переменной и прологарифмируем неравенство по основанию 3:

$$\frac{3}{4} \leq (x-2)^{\log_3(x-2)} \leq 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{3}{4} \leq \log_3 (x-2)^{\log_3(x-2)} \leq \log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log_3 4 \leq \log_3^2(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3^2(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_3(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq x \leq 5.$$

Ответ: $\left[\frac{7}{3}; 5\right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть в проект будет вложено $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., тогда на банковском счете будет размещено $50 - \frac{5x^2}{144}$ млн руб., а сумма, полученная инвестором по завершении проекта, будет равна $x + 1,2 \cdot \left(50 - \frac{5x^2}{144}\right)$ млн руб., где $0 \leq x \leq 12\sqrt{10}$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x + 1,2 \cdot \left(50 - \frac{5x^2}{144}\right) = -\frac{x^2}{24} + x + 60.$$

Она квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом и достигает своего наибольшего значения в точке

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{24}\right)} = 12,$$

удовлетворяющей условию $0 \leq x \leq 12\sqrt{10}$. Значит, в проект будет вложено $\frac{5 \cdot 12^2}{144} = 5$ млн руб., а прибыль от проекта составит $12 - 5 = 7$ млн руб., что составляет $\frac{7}{5} \cdot 100\% = 140\%$.

Ответ: 140.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

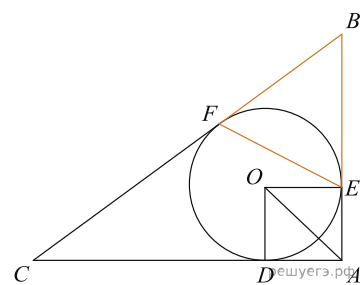
б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4

С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| + 2$ и $y = ax + a$. Количество решений исходного уравнения равно количеству точек пересечения графиков данных функций. Определим, при каких a графики будут иметь более двух общих точек на открытом луче $(-1; +\infty)$.

Уравнение $y = a(x+1)$ задает семейство прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$ с угловым коэффициентом, равным a . Изобразим эскиз графика функции f (см. рис.) и заметим, что при $a \leq 0$ графики не имеют общих точек на промежутке $(-1; +\infty)$.

Рассмотрим положительные значения параметра. Если угловой коэффициент прямой $y = a(x+1)$ меньше, чем у прямой n , или больше, чем у прямой m , то на промежутке $(-1; +\infty)$ графики будут иметь ровно одну общую точку. Если прямая $y = a(x+1)$ совпадает с прямой n или с прямой m , то графики будут иметь ровно две общие точки. Графики имеют три общие точки, а исходное уравнение имеет три положительных решения, если прямые $y = a(x+1)$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми n и m . Найдем граничные значения параметров, соответствующие этим прямым.

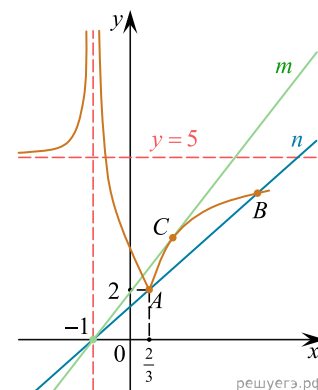
Прямая n проходит через точку $A\left(\frac{2}{3}; 2\right)$, тогда $a\left(\frac{2}{3} + 1\right) = 2$, откуда находим $a = \frac{6}{5}$. Заметим, что на луче $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ функция f принимает вид $f(x) = 5 - \frac{5}{x+1}$ и что прямая n вторично пересекает график f в точке $B\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Прямая m касается ветви гиперболы $y = 5 - \frac{5}{x+1}$. Касательная к гиперболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому уравнение $5 - \frac{5}{x+1} = a(x+1)$ или $a(x+1)^2 - 5(x+1) + 5 = 0$ имеет единственное решение. Чтобы квадратное относительно $x+1$ уравнение имело единственный корень, его дискриминант $25 - 20a$ должен быть равен нулю, откуда $a = \frac{5}{4}$.

При найденном значении параметра точка касания C имеет координаты $\left(1; \frac{5}{2}\right)$, она действительно лежит между точками A и B , как показано на рисунке, иначе оказалось бы, что рисунок неверен, и потребовалось бы рассмотреть соответствующую конфигурацию.

Итак, при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ исходное уравнение будет иметь более двух корней на $(-1; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right)$.



Приведём авторское решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1, +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1, +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1, +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1, \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1, \frac{2}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1, при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{5 - 2a + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5 - 2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}$, поэтому

он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$f\left(\frac{2}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a - 5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a - 30}{9} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1, +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Общая сумма сдач составила $300 \cdot 10 + 500 \cdot 2 = 4000$ руб.

а) Каждый должен был получить $4000 : 250 = 16$ руб. сдачи. Значит, каждый мог получить не более одной десятирублевой монеты. Поэтому раздать все 300 монет не получилось бы.

б) Ясно, что каждая сдача была не меньше 10 руб., иначе десятки вообще не получилось бы раздать. Значит, покупателей было не более $4000 : 10 = 400$ человек. Такая ситуация возможна, если триста получили сдачу по десятке, а остальные сто — по пять двушек.

в) Будем выдавать каждому покупателю сдачу десятками, пока можем. Если десятки кончатся или величина сдачи меньше десяти рублей — выдадим ее двушками. Поскольку все сдачи четны, в случае окончания десятков выдать все оставшиеся сдачи будет можно. Если же десятки не кончатся, каждый получит не более 4 двушек. Значит, удастся обеспечить не менее 125 человек. Более того, если их 126, можно просто отдать последнему все оставшиеся в кассе деньги.

Если же их 127 или больше, то рассмотрим вариант, когда 126 из них должны получить по 8 руб. (то есть по четыре двушки), один — все остальные деньги, а остальные — ничего. На это понадобится $126 \cdot 4 = 504 > 500$ двушек, которых не хватает.

Ответ: а) нет; б) 400; в) 126.