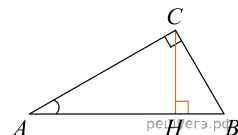


Вариант 92

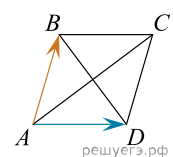
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 24, $BH = 7$. Найдите $\sin A$.



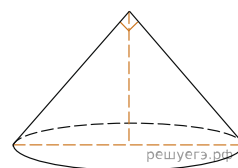
№ 2.

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



№ 3.

Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .



№ 4.

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

№ 5.

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^\circ\text{C}$, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.

№ 6.

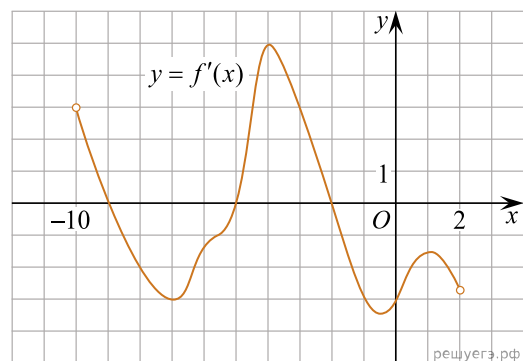
Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8} = 2^x$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



№ 9.

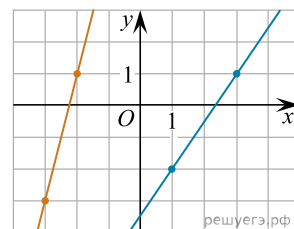
Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

№ 10.

От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 4 \sin^2(\pi + x) \cos^2(\pi - x) - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

№ 14.

В прямом круговом цилиндре проведена образующая NN_1 , точка N лежит в нижнем основании. Отрезок KM_1 пересекает ось цилиндра, а точки K и M_1 лежат на окружностях нижнего и верхнего основания соответственно.

- Докажите, что треугольник KNM_1 прямоугольный.
 - Найдите расстояние от точки N до прямой KM_1 , если $KN = 9$, $NN_1 = 20\sqrt{3}$, $N_1M_1 = 20$.
-

№ 15.

Решите неравенство $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 4x - 2} \geq x$.

№ 16.

Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S = 1,1S_0 + 2000$, где S_0 — цена ценной бумаги на начало года в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а также снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тысяч рублей, которые он может положить на банковский счёт или может приобрести на них ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

№ 17.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол BCD — тупой. Через точку B проведена прямая, параллельная прямой CD и пересекающая прямую AD в точке E . На продолжении BE за точку E отмечена точка F такая, что $DE = DF$.

- Докажите, что точки A , F , C и D лежат на одной окружности.
 - Найдите расстояние от точки C до прямой AF , если $BD = 10$ и $\cos \angle ADC = 0,6$.
-

№ 18.

Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4 \log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

№ 19.

На столе лежат вырезанные из бумаги квадраты и прямоугольники, размеры сторон которых — натуральные числа. Для каждого квадрата обязательно найдется прямоугольник, равный ему по площади, но шириной на 5 меньше, чем сторона квадрата. И наоборот, для каждого прямоугольника обязательно найдётся квадрат, равный ему по площади, со стороной на 5 больше, чем его ширина.

- Может ли лежать на столе прямоугольник шириной 15?
 - Может ли лежать на столе прямоугольник длиной 36?
 - Какое наибольшее количество различных фигур может лежать на столе?
-

Ответы

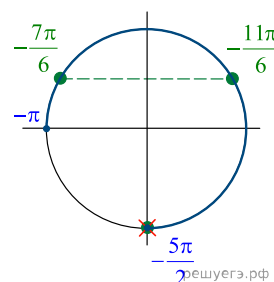
Номер	Задание	Ответ
1	27342	0,28
2	27715	12
3	27121	9
4	320183	0,375
5	320197	0,19
6	26671	4
7	77415	22
8	27501	5
9	27998	30
10	26591	11
11	509213	-11
12	77470	-10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x(\operatorname{ctg} x - \cos x) = 2 \sin^2 x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -1, \operatorname{tg} x(\operatorname{ctg} x - \cos x) = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Корни уравнения $\sin x = -1$ не удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Тогда получаем:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

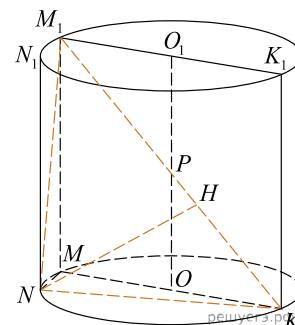
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Назовём ось цилиндра OO_1 , проведём образующие MM_1 и KK_1 . Тогда, поскольку KM_1 пересекает ось цилиндра, ось цилиндра лежит в плоскости KMM_1K_1 . Таким образом, KM — диаметр, и, значит, угол KNM прямой. Тогда, по теореме о трёх перпендикулярах, прямая NM_1 также перпендикулярна прямой KN , а треугольник KNM_1 прямоугольный.

б) Из точки N опустим перпендикуляр NH на прямую KM_1 , искомое расстояние — длина этого перпендикуляра. Найдём её как высоту прямоугольного треугольника KNM_1 :



$$NM_1 = \sqrt{N_1 M_1^2 + NN_1^2} = 40,$$

$$KM_1 = \sqrt{KN^2 + NM_1^2} = 41,$$

откуда

$$NH \cdot KM_1 = KN \cdot NM_1 \Leftrightarrow NH = \frac{KN \cdot NM_1}{KM_1} = \frac{360}{41}.$$

Ответ: б) $\frac{360}{41}$.

No 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Заметим, что при $x \leq 0$ подкоренное выражение отрицательно, значит, решений нет. Пусть $x > 0$. тогда:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 4x - 2 \geq x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x - 1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 + x - 1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x-1)^2 + 1) \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1. \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 + x - 1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x-1)^2 + 1) \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1. \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 + x - 1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x-1)^2 + 1) \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1. \end{aligned}$$

Ответ: $[1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть S_0 —сумма денег у Максима в какой-то момент времени, тогда при вложении денег на банковский депозит S_0 будет увеличиваться: $S_2 = 1,12S_0$. Необходимо понять, в какой момент времени стоит продать ценную бумагу и положить деньги на банковский счет, для этого решим неравенство:

$$S_2 > S_1 \Leftrightarrow 1,12S_0 > 1,1S_0 + 2000 \Leftrightarrow 0,02S_0 > 2000 \Leftrightarrow S_0 > 100000.$$

Найдем сумму денег через 4 года:

$x_1 = 1,1 \cdot 80000 + 2000 = 90000 < 100000$: нужно снова вложиться в ценную бумагу;

$x_2 = 1,1 \cdot 90000 + 2000 = 101000$: откладываем деньги в банк;

$x_3 = 1,12 \cdot 101000 = 113120$: повторяем последнее действие.

$x_4 = 1,12 \cdot 113120 = 126694,4$.

Ответ: 126 694,4 рублей.

№ 17.

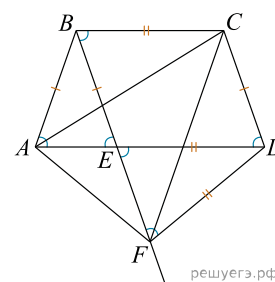
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Четырёхугольник $BCDE$ — параллелограмм, поэтому $CD = BE = AB$, $BC = ED = DF$. В треугольниках ABE и EDF углы при основании равны, а потому $\angle ABE = \angle EDF$. Углы BCA и CAD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых секущей. Кроме того,

$$\angle FDC = \angle FDE + \angle EDC = \angle ABE + \angle EBC = \angle ABC,$$

то есть треугольники ABC и CDF равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BCA = \angle CFD$, тогда $\angle CAD = \angle CFD$. Следовательно, точки A, F, C и D лежат на одной окружности.



б) Из доказанного в пункте а) следует, что $\angle ADC = \angle AFC$ и $AC = FC$. В равнобедренной трапеции диагонали равны, то есть $AC = BD$. Тогда искомое расстояние равно

$$FC \cdot \sin \angle AFC = BD \cdot \sin \angle ADC = 10 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = 10 \cdot 0,8 = 8.$$

Ответ: б) 8.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но — или в ответ включены также и одно-два неверных значения; — или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: — или взаимного расположения трёх окружностей; — или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Очевидно, если x подходит в это неравенство, то и $-x$ тоже подходит. Поэтому решение может быть единственным только в том случае, если это решение $x = 0$. Кроме того, при $x = 0$ неравенство должно обратиться в равенство, иначе при достаточно близких к нулю x неравенство продолжит выполняться (по непрерывности правой части на всей области определения). Итак,

$$1 = \frac{2a - 4 \log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}{2a + 4 + \log_{\frac{1}{3}}^2(4a^2 - 4a + 9)},$$

$$4 + \log_{\frac{1}{3}}^2(4a^2 - 4a + 9) = -4 \log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9),$$

$$(\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9) + 2)^2 = 0,$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9) = -2,$$

$$4a^2 - 4a + 9 = 9,$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1.$$

Рассмотрим эти случаи. При $a = 1$ имеем $1 \leq \frac{x^2 + 10}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 10}$. Решим это неравенство. Поскольку знаменатель положителен, умножим на него.

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 10 \leq x^2 + 10,$$

$$25(18x^4 + 7x^2) \leq x^4,$$

$$449x^4 + 175x^2 \leq 0.$$

$x = 0$. Итак, $a = 1$ подходит.

При $a = 0$ имеем $1 \leq \frac{x^2 + 8}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 8}$. Решим это неравенство. Поскольку знаменатель положителен, умножим на него.

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 8 \leq x^2 + 8,$$

$$25(18x^4 + 7x^2) \leq x^4,$$

$$449x^4 + 175x^2 \leq 0.$$

$x = 0$. Итак, $a = 0$ тоже подходит.

Ответ: $a = 0$, $a = 1$. При этом $x = 0$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Вместе с таким прямоугольником должен быть квадрат со стороной $15+5=20$ и площадью 400. Значит, и площадь прямоугольника должна быть 400, поэтому его длина должна быть равна $\frac{400}{15}$, что нецелое.

б) Пусть ширина прямоугольника x , тогда на столе есть равновеликий с прямоугольником квадрат со стороной $x+5$, откуда $(x+5)^2 = 36x$, откуда $x^2 - 26x + 25 = 0$, $x = 1$, $x = 25$. Значению $x = 1$ соответствует прямоугольник длины 36 и квадрат со стороной 6.

в) Пусть ширина прямоугольника a , а длина b . Тогда на столе есть равновеликий с прямоугольником квадрат со стороной $a+5$, откуда

$$(a+5)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 = ab \Leftrightarrow 25 = a(b - 10 - a).$$

Значит, 25 кратно a , откуда получаем три варианта:

$$a = 1,$$

$$b - 10 - a = 25,$$

$$b = 36;$$

$$a = 5,$$

$$b - 10 - a = 5,$$

$$b = 20;$$

$$a = 25,$$

$$b - 10 - a = 1,$$

$$b = 36.$$

К каждому прямоугольнику есть парный квадрат, и все они разные, поэтому на столе могут лежать максимум 6 фигур.

Ответ: а) нет, б) да, в) 6.
