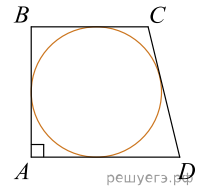


Вариант 93

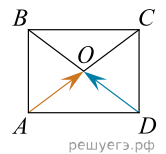
№ 1.

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



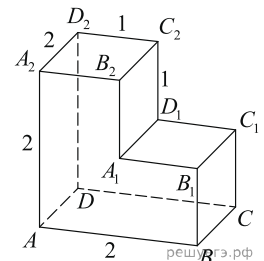
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите тангенс угла $B_2A_2C_2$.



№ 4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

№ 5.

Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,07. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

№ 6.

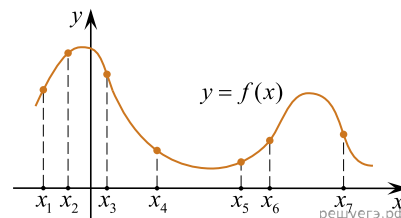
Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(9b^2 - 49) \left(\frac{1}{3b-7} - \frac{1}{3b+7} \right) + b - 13$ при $b = 345$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



№ 9.

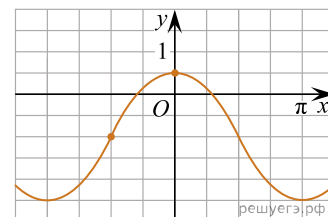
Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку (в Н·м), определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,75$ Н·м?

№ 10.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{16 \sin^2 x - 4 \sin x}{\sqrt{\cos x} - 1} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4}; \pi \right]$.

№ 14.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB=4$, а боковое ребро $SA=7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

- Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
 - Найдите объём пирамиды $BCKM$.
-

№ 15.

Решите неравенство: $3^{2x^2} + 3^{x^2+2x+5} \geq 10 \cdot 3^{4x+6}$.

№ 16.

В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором 1кг алюминия приходится на 2кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

№ 17.

Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC , из которых AD большее, на два подобных треугольника.

- Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC=18$, $AD=50$ и $\cos \angle CAD = \frac{3}{5}$.

№ 18.

Найти все значения x , при каждом из которых неравенство

$$(2-a) \cdot x^3 + (1-2a) \cdot x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

№ 19.

На доске написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 5, но не превосходит 45. Вместо некоторых чисел (возможно одного) на доске написали числа меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 5, с доски стёрли, но на доске осталось хотя бы одно число.

- Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 32. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 39?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 32. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=27938	2
2	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=27712	8
3	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=245375	2
4	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=509433	0,1
5	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=628364	0,9951
6	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=26670	0
7	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=77386	346
8	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=502067	3
9	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=27999	30
10	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=99609	600
11	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=509123	1,5
12	https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=77428	1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

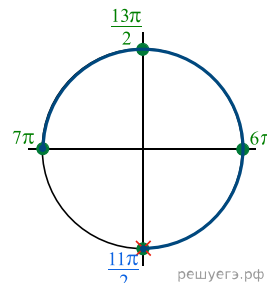
Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \frac{3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4}{\sin x + 1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4}{\sin x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \frac{3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4}{\sin x + 1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4}{\sin x + 1} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \frac{3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4}{\sin x + 1} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4}{\sin x + 1} = 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{1-\sin^2 x} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3^{\sin^2 x}} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^{\sin^2 x}\right)^2 - 4 \cdot 3^{\sin^2 x} + 3 = 0, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sin^2 x} = 1, \\ 3^{\sin^2 x} = 3, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3^{\sin^2 x}} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{\sin^2 x} > 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^{\sin^2 x}\right)^2 - 4 \cdot 3^{\sin^2 x} + 3 = 0, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sin^2 x} = 1, \\ 3^{\sin^2 x} = 3, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3^{\sin^2 x}} + 3^{\sin^2 x} - 4 = 0, \\ \sin x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{\sin^2 x} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3\sin^2 x\right)^2 - 4 \cdot 3\sin^2 x + 3 = 0, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin^2 x = 1, \\ 3\sin^2 x = 3, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ \sin^2 x = 1, \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи единичной окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[\frac{11\pi}{2}; 7\pi\right]$. Получаем числа $6\pi, \frac{13\pi}{2}, 7\pi$.

Ответ: а) $x = \pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $6\pi, \frac{13\pi}{2}, 7\pi$.



№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

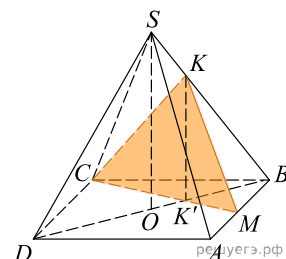
Решение. а) Пусть SO — высота пирамиды $SABCD$. Из условия следует, что $BK=6$, а $BM=3$. Пусть K — точка пересечения CM и BD . В треугольнике BCM имеем: $BM=3$, $BC=4$. Следовательно, $CM=5$. Отрезок BK — биссектриса в этом треугольнике, значит, $\frac{MK'}{K'C} = \frac{3}{4}$, откуда $MK' = \frac{3}{7}CM = \frac{15}{7}$. Пусть $BK = x$, применим теорему косинусов:

$$\frac{225}{49} = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12\sqrt{2}}{7}, \\ x = \frac{9\sqrt{2}}{7}. \end{cases}$$

Корень $\frac{9\sqrt{2}}{7}$ является посторонним, поскольку $\frac{9\sqrt{2}}{7} < \frac{12}{5}$, то есть меньше высоты треугольника BCM . Теперь заметим, что $BO = 2\sqrt{2}$, откуда

$$\frac{BK}{BS} = \frac{6}{7} = \frac{BK'}{BO}.$$

Тогда треугольники BKK' и BSO подобны. Таким образом, KK' параллельна SO , а значит, плоскость CKM содержит



прямую KK' , перпендикулярную ABC . Следовательно, плоскости CKM и ABC перпендикулярны.

б) Прямая KK' перпендикулярна плоскости ABC , поэтому она является высотой пирамиды $BCKM$ с основанием BCM . Площадь треугольника BCM равна 6. Найдем KK' :

$$KK' = \frac{6}{7}SO = \frac{6}{7}\sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{6\sqrt{41}}{7}.$$

Тогда объем пирамиды $BCKM$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot KK' \cdot S_{BCM} = \frac{12\sqrt{41}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{41}}{7}$.

Примечание: Отрезок BK' может быть найден из более простых соображений. Заметим, что треугольники BKM и CKD подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{BK'}{K'D} = \frac{BM}{CD} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow K'D = \frac{4}{3}BK'$. При этом $BK' + K'D = BD = 4\sqrt{2}$, откуда $BK' = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

Можно по предложению **Альберта Власова** воспользоваться формулой длины биссектрисы прямоугольного треугольника CBM : $BK' = \sqrt{2} \cdot \frac{CB \cdot BM}{CB + BM} = \sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{4 + 3} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Разделим обе части неравенства на выражение 3^{4x+6} , положительное при всех значениях x . Получим:

$$3^{2x^2-4x-6} + 3^{x^2-2x-1} \geq 10.$$

Обозначим $3^{x^2-2x-1} = t$, тогда

$$\frac{t^2}{3^4} + t \geq 10 \Leftrightarrow t^2 + 81t - 810 \geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t+90) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -90, \\ t \geq 9. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \leq -90, \\ 3^{x^2-2x-1} \geq 9 \end{cases} &\Leftrightarrow 3^{x^2-2x-1} \geq 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 3. \end{cases} \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \leq -90, \\ 3^{x^2-2x-1} \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{x^2-2x-1} \geq 3^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. В каждой области в день может быть затрачено 500 человеко-часов труда.

Пусть в первой области на добыче алюминия ежедневно будет затрачено x человеко-часов, а во второй области – y^2 человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг
Первая область	x	$0,2x$	$500 - x$	$0,1 \cdot (500 - x)$
Вторая область	y^2	y	$500 - y^2$	$\sqrt{500 - y^2}$
Всего		$0,2x + y$		$50 - 0,1x + \sqrt{500 - y^2}$

Для производства сплава масса добытого алюминия должна быть вдвое меньше массы добытого никеля:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (0,2x + y) &= 50 - 0,1x + \sqrt{500 - y^2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0,5x &= 50 - 2y + \sqrt{500 - y^2} \Leftrightarrow 0,1x = 10 - \frac{2y}{5} + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5}. \quad (*) \quad 2 \cdot (0,2x + y) = 50 - 0,1x + \sqrt{500 - y^2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0,5x &= 50 - 2y + \sqrt{500 - y^2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 0,1x &= 10 - \frac{2y}{5} + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5}. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Пусть m — масса сплава, она равна сумме масс добытых металлов:

$$\begin{aligned}
 m &= (0,2x + y) + (50 - 0,1x + \sqrt{500 - y^2}) = 0,1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2}. \quad m = (0,2x + y) + (50 - 0,1x + \sqrt{500 - y^2}) = \\
 &= 0,1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2}.
 \end{aligned}$$

Учитывая равенство (*), имеем:

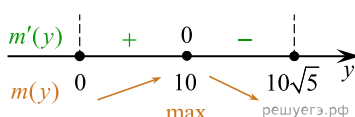
$$\begin{aligned}
 m(y) &= \left(10 - \frac{2y}{5} + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5}\right) + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} = \frac{3y}{5} + \frac{6\sqrt{500 - y^2}}{5} + 60. \quad m(y) = \left(10 - \frac{2y}{5} + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5}\right) + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} = \\
 &= \frac{3y}{5} + \frac{6\sqrt{500 - y^2}}{5} + 60. \quad m(y) = \\
 &= \left(10 - \frac{2y}{5} + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5}\right) + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} = \\
 &= \frac{3y}{5} + \frac{6\sqrt{500 - y^2}}{5} + 60.
 \end{aligned}$$

Найдём наибольшее значение функции $m(y)$, где $0 \leq y \leq 10\sqrt{5}$. Для этого исследуем функцию с помощью производной.

$$m'(y) = \frac{3}{5} + \frac{6 \cdot (-2y)}{5 \cdot 2\sqrt{500 - y^2}} = \frac{3\sqrt{500 - y^2} - 6y}{5\sqrt{500 - y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$m'(y) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{500 - y^2} - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 10$$



Заметим, что при $y = 10$ равенство (*) выполняется, если $x = 100$.

Таким образом, наибольшее значение функции $m(y)$ равно $m(10) = \frac{3 \cdot 10}{5} + \frac{6\sqrt{500 - 10^2}}{5} + 60 = 90$. Значит, завод сможет производить 90 кг сплава ежедневно.

Ответ: 90.

№ 17.

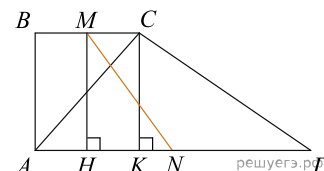
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Прямые AD и BC параллельны, поэтому $\angle ACB = \angle CAD$.

Предположим, что $\angle BAC = \angle ACD$, тогда получаем, что прямые AB и CD параллельны и $ABCD$ — параллелограмм. Значит, предположение неверно и $\angle ABC \neq \angle ACD$.

б) Треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, откуда

$$AC = \sqrt{BC \cdot AD} = 30.$$



Опустим из вершины C перпендикуляр CK на основание AD . Тогда $AK = AC \cdot \cos \angle CAD = 18 = BC$. Значит, $ABCK$ — прямоугольник.

Следовательно,

$$AB = CK = AC \cdot \sin \angle CAD = 24.$$

Пусть N и M — середины оснований AD и BC соответственно, MN — перпендикуляр к AD . Тогда $ABMN$ — прямоугольник. Получаем, что

$$MN = AB = 24, NH = AN - AH = AN - BM = 16.$$

В прямоугольном треугольнике MNH имеем:

$$MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = 8\sqrt{13}.$$

Ответ: $8\sqrt{13}$.

Приведем решение John Titor.

Треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, откуда

$$AC = \sqrt{BC \cdot AD} = 30.$$

Пусть N и M — середины оснований AD и BC соответственно. Проведем через точку C прямую, параллельную пря-

мой MN . Пусть E — точка пересечения этой прямой и отрезка AD . $NMCE$ — параллелограмм, следовательно,
 $AE = AN + NE = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = 25 + 9 = 34$.

В треугольнике ACE по теореме косинусов найдем CE :

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AC \cdot AE \cos \angle CAE = 30^2 + 34^2 - 2 \cdot 30 \cdot 34 \cdot \frac{3}{5} = 832 \Leftrightarrow CE = 8\sqrt{13}.$$

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AC \cdot AE \cos \angle CAE = 30^2 + 34^2 - 2 \cdot 30 \cdot 34 \cdot \frac{3}{5} = 832 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow CE = 8\sqrt{13}.$$

Следовательно, $MN = CE = 8\sqrt{13}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Преобразуем неравенство, раскрыв скобки, и запишем его как квадратное от a :

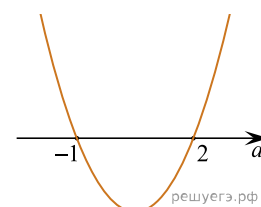
$$(2-a) \cdot x^3 + (1-2a) \cdot x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - ax^3 + x^2 - 2ax^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4)a - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0.$$

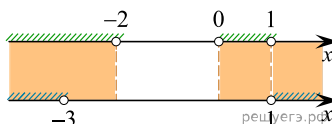
Рассмотрим $f(a) = a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4)a - 2x^3 - x^2 + 6x - 5$ — квадратичную функцию с положительным старшим коэффициентом. Для того чтобы неравенство $f(a) > 0$ выполнялось хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$ необходимо и достаточно, чтобы **не выполнялась** система

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0, \end{cases}$$



то есть выполнялась совокупность

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^3 - 2x^2 + 4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0, \\ 4 + 2x^3 + 4x^2 - 8 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^3 - 3x^2 + 6x > 0, \\ 3x^2 + 6x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^3 - 2x^2 + 4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0, \\ 4 + 2x^3 + 4x^2 - 8 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^3 - 3x^2 + 6x > 0, \\ 3x^2 + 6x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^3 - 2x^2 + 4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0, \\ 4 + 2x^3 + 4x^2 - 8 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^3 - 3x^2 + 6x > 0, \\ 3x^2 + 6x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + x - 2) < 0, \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(x-1) < 0, \\ (x+3)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 0 < x < 1, \\ x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, если были написаны 10 раз число 44 и 10 раз число 6, и каждое из двадцати чисел уменьшили на единицу, то их среднее было равно 25, а после описанных действий оно станет равно 43.

б) Пусть x — количество стёртых чисел, а y — количество прочих уменьшаемых чисел. Тогда первоначально сумма всех чисел была равна $32 \cdot 20 = 640$. А в результате на доске останутся $20 - x$ чисел с общей суммой $640 - 6x - y$. Предположим, что среднее арифметическое оставшихся чисел равно 39, тогда

$$\frac{640 - 6x - y}{20 - x} = 39 \Leftrightarrow 640 - 6x - y = 780 - 39x \Leftrightarrow 140 = 33x - y.$$

Отсюда следует, что $x \geq 5$. Но тогда $y \geq 33 \cdot 5 - 140 = 25$, что невозможно. Значит, среднее арифметическое оставшихся чисел не может быть равно 39.

в) Среднее арифметическое первоначальных чисел равно 32, значит, $6x + 45(20 - x) \geq 32 \cdot 20$, откуда $x \leq 6$. Тогда в силу неравенств

$$\frac{640 - 6x - y}{20 - x} \leq \frac{640 - 6x}{20 - x} = 6 - \frac{520}{x - 20} \leq 6 - \frac{520}{6 - 20} = 6 + 37\frac{2}{14} = 43\frac{1}{7}$$

среднее арифметическое оставшихся на доске чисел не может быть больше значения $43\frac{1}{7}$, которое достигается при $x = 6$, $y = 0$.

Приведём пример, при котором достигается полученное значение. Пусть на доске было написано шесть чисел 6, тринадцать чисел 45 и число 19 — их среднее арифметическое равно 32. Затем все числа 6, и только их, уменьшили на единицу и стёрли. На доске остались тринадцать чисел 45 и число 19 — их среднее арифметическое равно $43\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да, б) нет, в) $43\frac{1}{7}$.