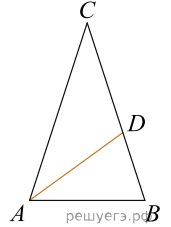


Вариант 96

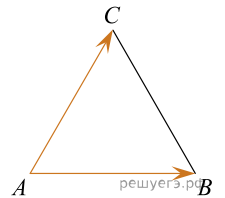
№ 1.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



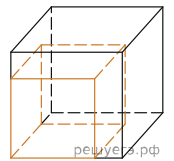
№ 2.

Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.



№ 3.

Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.



№ 4.

В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

№ 5.

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

№ 6.

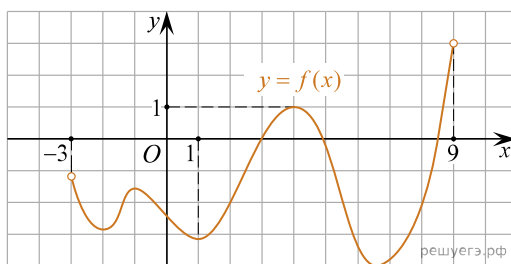
Найдите корень уравнения: $9^{-5+x} = 729$.

№ 7.

Найдите значение выражения $5^{3+\log_5 2}$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции равна нулю на отрезке $[0; 8]$.



№ 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

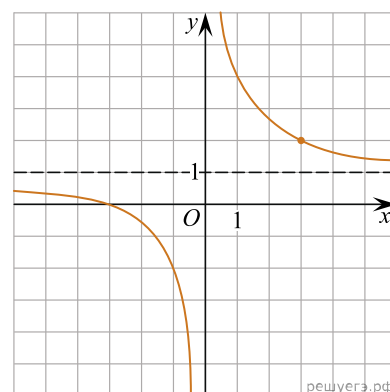
где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

№ 10.

Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша — за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\log_{\sin x}(\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x) = 1$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

№ 14.

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP:PB=3:1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_4 (6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|) \leq \frac{1}{2} + \log_2 |\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2||$.

№ 16.

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

№ 17.

Хорды AD , BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E, F последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^4 + y^2 - 1) \log_2(x^2 + y) = 0, \\ y = ax^2 + 2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

№ 19.

Дима и Никита задумали по цифре и сообщили их Маше. Маша нашла сумму этих цифр, их разность, а затем перемножила все 4 числа. Мог ли полученный результат быть равен:

а) 1989?

б) 2012?

в) 2016?

Если нет — объясните почему, если да — определите цифры, задуманные Димой и Никитой.

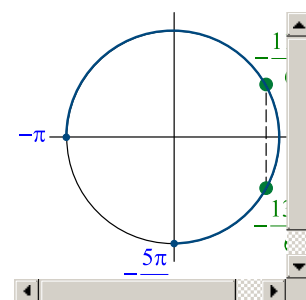
Номер	Задание	Ответ
1	27768	36
2	27720	6
3	27061	4
4	283579	0,995
5	509352	0,25
6	26666	8
7	26882	250
8	661019	3
9	317098	0,625
10	99617	30
11	508961	-15
12	77492	1,5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при $\cos x > \frac{1}{2}$. Преобразуем его при этом условии:

$$\begin{aligned}
 \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\
 \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходят: $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$.

№ 14.

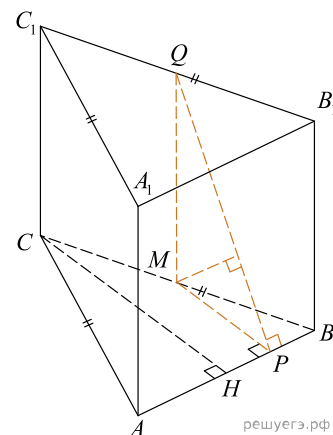
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Докажем, что прямые AB и PQ перпендикулярны, отсюда и будет следовать, что сторона AB параллельна плоскости α .

Проведём высоту CH треугольника ABC . Он равнобедренный, поэтому H — середина AB . По теореме Фалеса для угла CBA перпендикуляр из точки M на прямую AB делит HB пополам, поэтому его основание и есть точка P . Осталось заметить, что отрезок QM перпендикулярен BC и, в силу того, что боковая грань призмы перпендикулярна основанию, плоскости ABC . Тогда по теореме о трёх перпендикулярах сторона AB перпендикулярна отрезку PQ . Таким образом, прямая AB параллельна плоскости α .

б) В треугольнике ABC имеем: $\cos ABC = \frac{BH}{BC}$, откуда $BC=10$, а также $CH=8$ по теореме Пифагора, и $MP = 4$, как средняя линия треугольника. Отсюда $QM = BB_1 = AA_1 = 5$.

Пусть точка X — точка пересечения α и отрезка PQ . Тогда отрезок MX перпендикулярен отрезку PQ по определению перпендикулярности прямой и плоскости. Рассмотрим прямоугольный треугольник PQM : в нем отрезок MX — высота, проведенная к гипотенузе. Основание высоты делит гипотенузу в отношении квадратов катетов, откуда $PX : XQ = 16 : 25$.



Ответ: б) 16:25.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|$, тогда

$$\log_4(6+t) \leq \frac{1}{7} + \log_2 |t| \Leftrightarrow \log_2(6+t) \leq 1 + 2\log_2 |t| \Leftrightarrow \log_2(6+t) \leq 1 + 2\log_2 |t| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(6+t) \leq \log_2 2t^2 \Leftrightarrow 0 < 6+t \leq 2t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t > -6, \\ 2t^2 - t - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < t \leq -\frac{3}{2}, \\ t \geq 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{cases} \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| > -6, \\ \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| \leq -\frac{3}{2}, \\ \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| \geq 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} |\sqrt{x} - 2| < \sqrt{x} + 6, \\ |\sqrt{x} - 2| \geq \sqrt{x} + \frac{3}{2}, \\ |\sqrt{x} - 2| \leq \sqrt{x} - 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sqrt{x} - 2 > -\sqrt{x} - 6, \\ \sqrt{x} - 2 \leq -\sqrt{x} - \frac{3}{2}, \\ \sqrt{x} - 2 \geq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sqrt{x} \leq \frac{1}{4}, \\ \sqrt{x} \geq 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{16}, \\ x \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left[0; \frac{1}{16}\right] \cup [4; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть рабочие первого завода за неделю производят x приборов, второго завода — y приборов, и пусть выполнено условие $x + y = 20$. Тогда доля человеко-часов, затраченных на первом заводе, составит $4x^3$, а на втором — y^3 . Таким образом, Леониду придется запланировать на оплату труда рабочих обоих заводов $1 \cdot (4x^3 + y^3) = S$ тысяч рублей в неделю. Так как $y = 20 - x$, то $S(x) = 4x^3 + (20 - x)^3$, $0 \leq x \leq 20$.

Найдем наименьшее значение функции $S(x) = 4x^3 + (20 - x)^3$ на $[0; 20]$:

$$S(x) = 4x^3 + 8000 - 3 \cdot 400x + 3 \cdot 20x^2 - x^3 = 3x^3 + 60x^2 - 1200x + 8000. S'(x) = 4x^3 + 8000 - 3 \cdot 400x + 3 \cdot 20x^2 - x^3 = 3x^3 + 60x^2 - 1200x + 8000.$$

$$S'(x) = 9x^2 + 120x - 1200;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 120x - 1200 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 40x - 400 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{1600}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm 40}{3}.$$

Искомый корень положителен, он равен $\frac{20}{3}$. Заметим, что на $[0; 20]$ это единственная точка экстремума. Если она окажется точкой минимума функции, то функция именно в этой точке и достигает наименьшего значения. Найдем

$$S'(6) = 9 \cdot 36 + 120 \cdot 6 - 1200 = 36(9 + 20) - 1200 = 1044 - 1200 < 0;$$

$$S'(7) = 9 \cdot 49 + 120 \cdot 7 - 1200 = 441 + 840 - 1200 = 1281 - 1200 > 0.$$

Итак, критическая точка функции точка $x = \frac{20}{3}$ является точкой минимума функции $S(x)$.

Поскольку количество изготовленных приборов будет выражаться числом натуральным, то наименьшая сумма, необходимая для выплаты рабочим, будет достигнута либо при $x = 6$, либо при $x = 7$. Сравним эти значения:

$$S(6) = 4 \cdot 216 + 14^3 = 864 + 2744 = 3608 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$S(7) = 4 \cdot 343 + 13^3 = 1372 + 2197 = 3569 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Итак, искомая сумма 3 569 000 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.

б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T , а H — проекция центра O на хорду AD . Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ , а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ .

Через точку T проведём прямую, параллельную AD , через точку P — прямую, параллельную CF , а через точку Q — прямую, параллельную BE . Эти прямые и хорды AD , BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

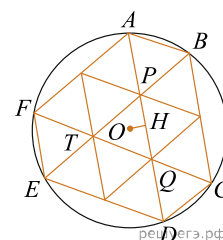
$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}. \quad OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

Ответ: $117\sqrt{3}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4

С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Введем замену $t = x^2 \geq 0$, тогда из исходной системы получим

$$\begin{cases} (t^2 + y^2 - 1) \log_2(t + y) = 0, \\ y = at + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + y^2 = 1, \\ y = 1 - t, \\ y = at + 2, \\ y > -t. \end{cases} \quad (*)$$

Поскольку $t = x^2$, исходная система имеет ровно 4 различных решения тогда, когда система (*) имеет ровно два различных решения для $t > 0$. При $t \geq 0$ совокупность

$$\begin{cases} t^2 + y^2 = 1, \\ y = 1 - t \end{cases}$$

определяет на плоскости tOy правую полуокружность окружности радиуса 1 с центром в точке $(0; 0)$ и луч, лежащий на прямой $y = 1 - t$. Уравнение $y = at + 2$ при $t \geq 0$ задает вращающийся луч, выходящий из точки $(0; 2)$. Неравенство $y > -t$ означает, что решения системы (*) должны лежать строго выше прямой $y = -t$.

Пусть a_1 — значение параметра a , при котором прямая $y = at + 2$ проходит через точку пересечения правой полуокружности окружности радиуса 1 с центром в точке $(0; 0)$ с прямой $y = -t$. Эта точка имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Пусть a_2 — значение параметра a , при котором прямая $y = at + 2$ проходит через точку пересечения правой полуокружности окружности радиуса 1 с центром в точке $(0; 0)$ с прямой $y = -t + 1$. Эта точка имеет координаты $(1; 0)$. И пусть a_3 — значение параметра a , при котором прямая $y = at + 2$ касается правой полуокружности окружности радиуса 1 с центром в точке $(0; 0)$. Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a \in (-\infty; a_1] \cup \{a_2; a_3\}$.

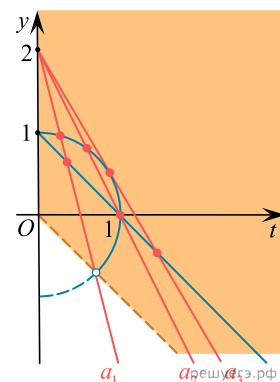
Найдем значение a_1 как тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс:

$$a_1 = -\frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2} - 1.$$

Значение a_2 найдем из уравнения $0 = a_2 \cdot 1 + 2$. Получаем: $a_2 = -2$.

Значение a_3 найдем из условия равенства нулю дискриминанта D квадратного уравнения $(at + 2)^2 + t^2 = 1$. Имеем: $D = (4a)^2 - 12(1 + a^2)$, откуда $a_3 = -\sqrt{3}$.

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{2} - 1] \cup \{-2; -\sqrt{3}\}$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть Дима задумал цифру x , а Никита— цифру y . Не теряя общности, можно положить $x \geq y$. Тогда Маша вычисляла произведение $xy(x-y)(x+y)$. Кроме того, множители не равны нулю, и, значит, $0 < y < x \leq 9$.

а) Уравнение $xy(x-y)(x+y) = 1989$ не имеет решений в натуральных числах, поскольку его правая часть нечетна, а левая часть четна для любых значений x и y .

б) Уравнение $xy(x-y)(x+y) = 2012$ также не имеет решений. Для доказательства запишем его в виде $xy(x-y)(x+y) = 4 \cdot 503$. Число 503 простое, следовательно, один из множителей левой части кратен 503. Но это невозможно, поскольку по условию числа x и y не больше 9.

в) Уравнение $xy(x-y)(x+y) = 2016$ запишем в виде $xy(x-y)(x+y) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что если из чисел x , y , $x-y$ и $x+y$ хотя бы два делятся на 3, то и все они также делятся на 3. Но тогда левая часть делится на 81, а правая— нет. Значит, ровно один сомножитель в левой части делится на 3, а следовательно, он делится и на 9. Кроме того, поскольку 7 — простое число, один из сомножителей левой части делится на 7.

Поскольку $0 < y < x \leq 9$, множители y и $x-y$ не могут делиться на 9. Следовательно, на 9 делится либо $x+y$, либо x . Рассмотрим эти варианты.

Если $x+y$ делится на 9, то $x+y = 9$, так как $x+y < 18$. В этом случае для делимости на 7 либо $x = 7$ (тогда $x = 7$, $y = 2$ — не подходит), либо $x-y = 7$ ($x = 8$, $y = 1$ — не подходит).

Если же $x = 9$, то для делимости на 7 либо $y = 7$ (подходит), либо $x-y = 7$ (откуда $y = 2$ — не подходит), либо $x+y = 14$ (откуда $y = 5$ — не подходит).

Тем самым, только пара $(9; 7)$ является решением.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да, 9 и 7.